

Indications de TD 5

Exercice 1. C'est la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de complexes suivante :

$$0 \rightarrow \frac{C_\bullet(B)}{C_\bullet(A)} \rightarrow \frac{C_\bullet(X)}{C_\bullet(A)} \rightarrow \frac{C_\bullet(X)}{C_\bullet(B)} \rightarrow 0.$$

Exercice 2. 1. Les colonnes sont bien exactes. La première et deuxième ligne sont exacte par la construction, et donc la troisième est aussi exacte par le lemme des neuf.

2. C'est exactement la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de la troisième ligne dans 1. plus le théorème d'isomorphisme de chaînes \mathcal{U} -petites.

Exercice 3. 1. Si f n'est pas surjectif, disons $x \notin \text{Im}(f)$, alors f se factorise par l'espace contractile $S^n \setminus \{x\}$, donc le degré devrait être 0. On peut fabriquer un contre-exemple de la réciproque de la manière suivante : on d'abord envoie la sphère vers un bouquet de deux sphères en écrasant l'équateur en un point ; puis on envoie une sphère identiquement sur la sphère au but, et envoie l'autre sphère sur le but de degré -1 (par exemple, en inversant un coordonnée).

Supposons f est injective. On prétend que f est forcément surjectif. Sinon, f est une application injective vers la sphère avec un point enlevé, *i.e.* \mathbf{R}^n , ce n'est pas possible (par exemple par le théorème de Borsuk-Ulam dans Exercice 15). Donc f est une bijection. [On a un autre argument possible pour la bijectivité de f : par le théorème d'invariance du domaine, l'image de f est ouverte. Or par la compacité de S^n , l'image de f est aussi fermée, donc f est surjective.]

Comme S^n est compacte, f est en fait un auto-homéomorphisme. Alors $\deg(f) \deg(f^{-1}) = \deg(\text{id}) = 1$ (le degré est évidemment multiplicatif). D'où, $\deg(f) = \pm 1$. Un contre-exemple de la réciproque peut être construit par la même méthode comme ci-dessus.

2. On va démontrer que ça coïncide avec celle définie par le groupe fondamental pour $n = 1$. En effet, ceci découle du diagramme commutatif suivant et l'isomorphisme de Hurewicz h .

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1) & \xrightarrow[\cong]{h} & H_1(S^1) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_1(S^1) & \xrightarrow[\cong]{h} & H_1(S^1) \end{array}$$

3. En utilisant un recouvrement de S^n qui est symétrique par rapport à la réflexion, on trouve que le degré d'une réflexion vaut -1 . Chaque élément de $A \in O_{n+1}(\mathbf{R})$ s'écrit comme une composition de plusieurs réflexions, et $\det(A) = 1$ s'il y en a un nombre pair, $\det(A) = -1$ s'il y en a un nombre impair ; et le même pour le degré.

4. C'est une conséquence immédiate du fait que la suite exacte longue de Mayer-Vietoris est naturelle, *i.e.* commute aux morphismes induits par f . Par conséquent, il suffit de construire une application de degré k pour S^1 , qui est faite dans la question 2.

Exercice 4. 1. (a) On peut construire une homotopie directement :

$$H(x, t) := \frac{(1-t)f(x) + t(-x)}{\|(1-t)f(x) + t(-x)\|}.$$

(b) On suppose par l'absurde que f n'admet pas de point fixe et pour chaque $x \in S^{2n}$, $f(x) \neq -x$. Alors par (a), on sait que f est homotope à l'antipode, donc $\deg(f) = (-1)^{2n+1} = -1$. Or si on note ι l'application antipode, alors $f \circ \iota$ n'a pas de point fixe par l'hypothèse géométrique. On utilise (a) encore une fois pour obtenir $f \circ \iota$ est homotope à ι , *i.e.* f est homotope à id , donc $\deg(f) = 1$. On arrive à une contradiction.

2. Chaque élément de G agit par un automorphisme, donc son degré est ± 1 . Comme le degré est multiplicatif, on obtient un morphisme des groupes : $f : G \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Par le résultat de 1, on sait que pour un élément non-neutre de G , l'action est homotope à l'antipode, dont le degré est $(-1)^{2n+1} = -1$. C'est-à-dire, le morphisme des groupes f satisfait $\ker(f) = \{e\}$, *i.e.* f est injectif.

3. (a) On suppose la sphère S^{2n-1} est donnée dans \mathbf{R}^{2n} par l'équation $x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 = 1$. Alors un champ de vecteur : en point (x_1, \dots, x_{2n}) , le vecteur est $(-x_2, x_1, -x_3, x_4, \dots, -x_{2n-1}, x_{2n})$.

(b) On considère $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ comme dans l'énoncé, alors on a toujours $x \perp f(x)$. On remarque que f et $f \circ \iota$ n'ont pas de point fixe. Par le résultat de 1(a), $f \sim \iota$ et $f \circ \iota \sim \iota$. Un calcul de degré nous fournit une contradiction.

Exercice 5. En fait, en contractant Δ^2 et un segment de plus, on voit directement que ce parachute est homotope à un bouquet de deux cercles.

Exercice 6. On peut calculer les groupes d'homologie d'un tore par la formule de Künneth, et les groupes de homologie de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ par l'homologie réduite (Exercice 12 de TD 4 de 2012/2013). Le résultat : $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2}$ et $H_2 = \mathbf{Z}$. Ils ne sont pas homotopiquement équivalents parce que leur groupes fondamentaux ne sont pas isomorphes : $\pi_1(T) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ mais $\pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^2) = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$.

Exercice 7. La bouteille de Klein est un bouquet de deux cercle a et b avec un 2-cellule attachée selon $aba^{-1}b$, donc $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = (\mathbf{Z}a \oplus \mathbf{Z}b)/(2b) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $H_2 = 0$.

Exercice 8. 1. Par la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, les groupes d'homologie de la droite à n origines sont faciles à calculer : $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus n-1}$.

2. Il a deux composantes connexes par arcs, donc $H_0 = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Or chaque simplexe singulière a pour l'image contenue dans une partie 'finie' par la compacité. Donc $H_i = 0$ pour $i \geq 1$.

Exercice 9. 1. X_g est homotope à un bouquet de $2g - 1$ cercles. $H_0(X_g) = \mathbf{Z}$, $H_1(X_g) = \mathbf{Z}^{\oplus(2g-1)}$, $H_2(X_g) = 0$. L'application induite en H_1 est $\mathbf{Z}^{\oplus 2g} \rightarrow \mathbf{Z}^{\oplus(2g-1)}$, qui envoie la base e_i vers e_i pour $i < 2g$, et envoie e_{2g} vers $\sum_{i=1}^{2g-1} e_i$.

2. On peut voir une surface de genre g comme X_g avec les $2g$ cercles collés en paire.

Exercice 10. 1. Si $n = 0$, alors $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2g}$ et $H_2 = \mathbf{Z}$. On suppose maintenant $n \geq 1$, alors $S_g \setminus X$ est homotope à un bouquet des $(n + 2g - 1)$ cercles, donc $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus n + 2g - 1}$ et $H_2 = 0$.

2. S_g/Y est homotope à $S_g \vee \bigvee^{m-1} S^1$. Donc $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2g + m - 1}$ et $H_2 = \mathbf{Z}$.

3. Le cas où $n = 0$ est traité dans 2. On suppose $n \geq 1$, alors $(S_g \setminus X)/Y$ est homotope à un bouquet des $(2g + n + m - 2)$ cercles. Donc $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2g + m + n - 2}$ et $H_2 = 0$.

Exercice 11. 1. Le cone de X est contractile, donc il a la même homologie d'un point. Par Mayer-Vietoris (la version pour l'homologie réduite : Exercice 12 de TD 4 de 2012/2013), $\widetilde{H}_0(\Sigma X) = 0$ donc $H_0(X; R) \simeq R$; $H_i(\Sigma X; R) = \widetilde{H}_i(\Sigma X; R) \simeq \widetilde{H}_{i-1}(X; R)$ pour $i \geq 1$, donc $H_i(\Sigma X; R) \simeq \widetilde{H}_{i-1}(X; R)$ pour $i \geq 2$ et $H_1(\Sigma X; R) \simeq R^{\oplus \pi_0(X)}$.

2. On a un homéomorphisme $X \times I \rightarrow X \times [0, 2]$, composé avec la projection $X \times [0, 2] \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ qui écrase $X \times 0$, $X \times 1$ et $X \times 2$ à trois points, on obtient par passe au quotient le δ .

3. On utilise la functorialité d'homologie et les faits suivants :

$\delta_* : \widetilde{H}(X) \rightarrow \widetilde{H}(X \vee X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}(X) \oplus \widetilde{H}(X)$ est donné en chaque facteur par l'identité (parce que $p_i \circ \delta = \text{id}_X$).

$(f \vee g)_* : \widetilde{H}(X) \oplus \widetilde{H}(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}(X \vee X) \rightarrow \widetilde{H}(X \vee X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}(X) \oplus \widetilde{H}(X)$ est donné par la matrice diagonale $\text{diag}(f_*, g_*)$.

$p_* : \widetilde{H}(X) \oplus \widetilde{H}(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}(X \vee X) \rightarrow \widetilde{H}(X)$ est la somme du groupe d'homologie.

Exercice 12. 1. Par la formule de Künneth, $H_*(X \times S^n; R) \simeq H_*(X; R) \otimes_R H_*(S^n; R)$ comme R -algèbres graduées. Or $H_*(S^n; R)$ est R en degré 0 et n , nul en autres degrés. Par conséquent, $H_i(X \times S^n) = H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$.

2. La liberté est déjà démontrée dans 1. Pour le rang, la formule de Künneth nous donne $H_*((S^n)^{\times k}; R) = H_*(S^n; R)^{\otimes k} = (R \oplus R \cdot t^n)^{\otimes k}$ comme R -algèbres graduées, où t est introduit juste pour suivre le degré. Donc $\text{rg}(H_{ni}) = \binom{k}{i}$ pour $0 \leq i \leq k$; les restes groupes d'homologie est nuls.

3. $S^d \wedge X = S^1 \wedge \cdots \wedge S^1 \wedge X = \Sigma^d(X)$, la suspension itérée. Donc par le résultat de Exercice 11, on a $\widetilde{H}_i(S^d \wedge X) = \widetilde{H}_{i-d}(X)$ pour tout i , donc $H_i(S^d \wedge X) = \widetilde{H}_{i-d}(X)$ pour tout $i \geq 1$ et $H_0(S^d \wedge X) = \widetilde{H}_0(S^d \wedge X) \oplus R = R$.

Exercice 13. 1. Si f n'a pas de point fixe, par le 1. de Exercice 27, f est homotope à l'application antipode. Donc $\text{deg}(f) = \pm 1$ (dépend de la parité de n). Mais si f est homotopiquement triviale, *i.e.* f homotope à une application constante, alors $\text{deg}(f) = 0$, qui est une contradiction.

2. On définit $\Delta := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq 0, x_1 + \dots + x_n = 1\}$. Alors Δ est homéomorphe à un disque D^{n-1} . On considère $f : \Delta \rightarrow \Delta$ définie par $x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|_1}$. On conclut par le théorème de Brouwer.

3. Il est facile de vérifier que $\phi : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une application continue à valeurs dans $[0, 1]^n$. On obtient ainsi un endo-morphismes de $[0, 1]^n$ qui est homéomorphe à un disque de dimension n . Par le théorème de Brouwer, il existe un point fixe de ϕ , qui dit exactement que f s'annule en ce point.

Exercice 14. $E \rightarrow B$ est un revêtement à deux feuilles. Tous les sous-groupes d'indice deux sont distingués, donc le revêtement est galoisien et le groupe des automorphismes est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

2. D'abord, on prend un recouvrement \mathcal{U} de B par des voisinages ouverts trivialisants, et on note \mathcal{V} le recouvrement correspondant de E (le pull-back de \mathcal{U}). On a donc une suite exacte courte des complexes des chaînes \mathcal{U} - ou \mathcal{V} -petites :

$$0 \rightarrow C_*^{\mathcal{U}}(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{t} C_*^{\mathcal{V}}(E, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{p_*} C_*^{\mathcal{U}}(B, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow 0.$$

La suite exacte longue associée est exactement ce qu'on cherche par le théorème d'isomorphisme des chaînes petites.

3. Comme on a le revêtement $S^n \rightarrow \mathbf{R}\mathbf{P}^n$ on peut appliquer la suite exacte dans 2. Or $H_i(S^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ pour $i = 0$ ou n et 0 pour les autres i , on a $H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ pour $i \leq n-1$. Et on sait qu'un CW-complexe a le groupe d'homologie nul pour les degrés plus que la dimension. Donc $H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$ pour $i \geq n+1$. Finalement, la dimension de $H_n(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est de 1 par le fait que la somme alternée des dimensions dans une suite exacte longue finie est 0. Pour résumer : $H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ pour $0 \leq i \leq n$ et 0 pour les autres i .

Exercice 15. 1. En fait, f et \bar{f} induisent morphismes de suites exactes courtes de complexes des chaînes petites :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{U}_1}(\mathbf{R}\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t} & C_*^{\mathcal{V}_1}(S^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{p_*} & C_*^{\mathcal{U}_1}(\mathbf{R}\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* \\ 0 & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{U}_2}(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{t} & C_*^{\mathcal{V}_2}(S^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) & \xrightarrow{p_*} & C_*^{\mathcal{U}_2}(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où \mathcal{U}_2 est un recouvrement suffisamment fin (ouverts trivialisants de $\mathbf{R}\mathbf{R}^n$ tel que les pull-backs en $\mathbf{R}\mathbf{P}^m$ sont aussi des ouverts trivialisants), et \mathcal{V}_2 , \mathcal{U}_1 et \mathcal{V}_1 sont des pull-backs de \mathcal{U}_2 . Donc on en déduit que f_* et \bar{f}_* sont morphismes des suites exactes longues de transfert.

(b) Comme $\bar{f}_* : H_0(\mathbf{R}\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rightarrow H_0(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un isomorphisme, et dans le digramme commutatif des deux suites exactes longues de transfert, il y a des parties du type suivant, pour tout $0 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathbf{R}\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \xrightarrow{\cong} & H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{f}_{*,i+1} & & \downarrow \bar{f}_{*,i} & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \xrightarrow{\cong} & H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Donc par récurrence, $\bar{f}_* : H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rightarrow H_i(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sont des isomorphismes pour tout $0 \leq i \leq n$.

Or il y a un carré dans le digramme commutatif des deux suites exactes longues de transfert :

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbf{R}\mathbf{P}^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \longrightarrow & H_n(S^m, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0 \\ \cong \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* \\ H_n(\mathbf{R}\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \end{array}$$

Mais ce n'est pas possible parce que un composé nous donne un isomorphisme et l'autre nous donne 0.

2. On suppose par l'absurde que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in S^n$. On considère l'application continue $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ définie par $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$. Clairement, g est impaire : $g(x) = -g(-x)$. Alors, 1. nous permet de conclure.

Exercice 16. 1. On applique le théorème de Borsuk-Ulam à $f = (f_1, \dots, f_n) : S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, qui est définie par $f_i(x) := \text{dist}(x, A_i)$.

2. Les hyperplans orientés de \mathbf{R}^n avec les deux hyperplans à l'infinie sont paramétré par la sphère S^n en associant les vecteur normal unité. (Proprement-dit, on complète d'abord \mathbf{R}^n par $\mathbf{R}\mathbf{P}^n$ en ajoutant l'hyperplan à l'infinie. Alors, les hyperplans de $\mathbf{R}\mathbf{P}^n$ sont des hyperplans de \mathbf{R}^n avec l'hyperplan à l'infinie qu'on ajoute. Comme $\mathbf{R}\mathbf{P}^n$ peut être aussi vu comme l'espace des droites dans $V = \mathbf{R}^{n+1}$. Donc les hyperplans de $\mathbf{R}\mathbf{P}^n$ sont identifiés naturellement aux hyperplans de V , qui sont paramétré par l'espace projectif dual $\mathbf{P}(V^*) \simeq \mathbf{R}\mathbf{P}^n$. Si on considère de plus les orientations, c'est un revêtement double de $\mathbf{P}(V^*)$, qui est homéomorphe à la sphère S^n .)

On considère $f = (f_1, \dots, f_n) : S^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, qui est par définition $f_i(v)$ est la mesure de A_i dans la partie positive de l'hyperplan orienté paramétré par v . Puis, le théorème de Borsuk-Ulam nous fournit un hyperplan H tel que pour chaque i , la mesure de A_i dans la partie positive est égale à celle dans la partie négative, (donc H n'est pas l'hyperplan à l'infinie) autrement-dit, H coupe A_i en deux parties de mesure égale.