Indications de TD 6

Exercice 1. 1. $H_{2i-1}(\mathbf{C}\,\mathbf{P}^n) = 0$, $H_{2i}(\mathbf{C}\,\mathbf{P}^n) = \mathbf{Z}$ pour $0 \leq i \leq n$.

2. $H_{2i-1}(\mathbf{C}\,\mathbf{P}^n) = 0$, $H_{2i}(\mathbf{C}\,\mathbf{P}^n) = \mathbf{Z}$ pour $i \geq 0$.

3. $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $H_2 = 0$.

4. Le complexe cellulaire : $0 \to \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0$, où la première flèche est $(x, y) \mapsto 2x + 2y$. Donc

$H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $H_2 = \mathbf{Z}$.

5. Il est homotope à $S^1 \vee S^1$. Le complexe cellulaire : $0 \to \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0$. Donc

$H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

6. Le complexe cellulaire : $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}^{\oplus 2g} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0$. Donc

$H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}^{\oplus 2g}$, $H_2 = \mathbf{Z}$.

Exercice 2. 1. Le complexe cellulaire est

$$0 \to \mathbf{Z} \to \cdots \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0.$$

2. $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_k = H_l = \mathbf{Z}$ (si $k \neq l$) ;$H_{k=l} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (si $k = l$), $H_2 = \mathbf{Z}$.

3. Le complexe cellulaire est le produit tensoriel des complexes cellulaires de $\mathbf{R}\,\mathbf{P}^2$, à savoir, $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0$. Donc le complexe cellulaire du produit est

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{(2,2)} \mathbf{Z}^{\oplus 2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \mathbf{Z}^{\oplus 3} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \mathbf{Z}^{\oplus 2} \xrightarrow{0} \mathbf{Z} \to 0.$$

Donc $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_1 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $H_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $H_3 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $H_4 = 0$.

Exercice 3. $H_0 = \mathbf{Z}$, $H_n = \mathbf{Z}$.

Exercice 4. 1. $\mathbf{R}\mathbf{P}^2$ et un point.

2. $\mathbf{R}\mathbf{P}^2$ et $S^1 \vee S^2$.

Exercice 5. 1. À coefficients $\mathbf{Q}$, $H_i = \mathbf{Q}$ pour $i = 0, 3$.

À coefficients $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $H_0 = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $H_1 = H_2 = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ si p divise n, $H_1 = H_2 = 0$ si p ne divise pas n, $H_3 = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

2. Chaque facteur libre $\mathbf{Z}$ en homologie entière donne un facteur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur la même dimension pour l'homologie à coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Chaque facteur du type $\mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z}$ en $H_i(X, \mathbf{Z})$ donne un facteur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur H_i et H_{i-1} à coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Et les autre facteurs p-primaire avec $p \neq 2$ ne contribue pas pour l'homologie à coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, donc on peut les mettre arbitrairement (mais fini).

Exercice 6. Il suffit de construire pour chaque $i \geq 1$, un espace X_i connexe par arcs dont le seule groupe d'homologie réduite non-nul est $H_i \simeq A_i$, parce que $X := \bigvee_i X_i$ nous conviendra. Pour chaque groupe abélien A, on choisit une résolution de A :

$$0 \to F_1 \xrightarrow{f} F_0 \to A \to 0,$$

où F_0 et F_1 sont deux groupes abéliens libres : $F_0 = \oplus_{k \in K} \mathbf{Z}$ et $F_1 = \oplus_{j \in J} \mathbf{Z}$. Alors on prend $\bigvee_{k \in K} S^i$, et puis on attache pour chaque $j \in J$, une cellule de dimension $i + 1$ à $\bigvee_{k \in K} S^i$, dont l'application d'attachement est donnée par f en utilisant la construction de Exercice 11 du TD 5.

Exercice 7. Voir l'indication de Exercice 31 du TD 4 de 2012/2013.

Exercice 8. $\chi(E) = n\chi(X)$, voir Exercice 31 du TD 4 de 2012/2013.

Exercice 9.

Exercice 10. C'est une conséquence directe de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris (on remarque que $H_n(D^n) = H_{n-1}(D^n) = 0$)

Exercice 11. On utilise le fait évident que un complexe simplicial est un cas spécial d'un CW-complexe, et son complexe des chaînes simpliciales est exactement son complexe cellulaire vu comme un CW-complexe. Tous les questions sont en fait contenues dans la preuve/théorème de l'isomorphisme entre l'homologie cellulaire et l'homologie singulière.