TD : feuille n°1
Notions de base.

Les exercices marqués du symbole ☕ sont des exercices à faire en priorité. Ce sont des exercices classiques, et les résultats de certains d'entre eux seront utilisés dans des cours ou dans des exercices ultérieurs.

1 Espaces topologiques, homéomorphismes et quotients

☕Exercice 1. Corps convexes.

1. Un *corps convexe de* $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble K compact, convexe, d'intérieur non vide, et contenant 0 dans son intérieur.
   (a) Montrez que la formule suivante définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$:
   $$N(x) = \sup\{\frac{1}{\lambda} \in]0; +\infty[\quad \mid \lambda x \in K\} .$$
   Remarque : si le convexe est symétrique ($x \in K \Leftrightarrow -x \in K$), on peut montrer que $N(x)$ est une norme.
   (b) Montrez qu'il existe un homéomorphisme $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui envoie K homéomorphiquement sur D^n et la frontière de K homéomorphiquement sur S^{n-1}.
2. Soit L un ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrez qu'il existe un homéomorphisme $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui envoie L est homéomorphiquement sur $D^m \times \{(0, \ldots, 0)\}$ et la frontière de L homéomorphiquement sur $S^m \times \{(0, \ldots, 0)\}$ pour un certain $m \leq n$.

Exercice 2. Compactification d'Alexandroff.

Soit X un espace topologique séparé et localement compact. On munit $X^+ = X \cup \{\infty\}$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de X, et les complémentaires dans X^+ des compacts de X.

1. Vérifiez que X^+ est bien un espace topologique.
2. Montrez que X^+ est un espace compact. Montrez que le sous-ensemble $X^+ \setminus \{\infty\}$, muni de la topologie induite est homéomorphe à l'espace X de départ.
3. Montrez que la topologie définie sur X^+ est l'unique topologie telle que
   (a) X^+ est compact
   (b) L'application identité $X \to X^+ \setminus \{\infty\}$ est un homéomorphisme.
4. Montrez que $(\mathbb{R}^n)^+$ est homéomorphe à S^n.

☕Exercice 3. Bouquet d'espaces.

1. Soit X, X' des espaces topologiques et $x \in X$ et $x' \in X'$. Montrez que le bouquet $X \vee X'$ est homéomorphe au sous-espace $X \times \{x'\} \cup \{x\} \times X'$ de $X \times X'$.
2. Soit $(S^1_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de copies de S^1 (avec un point distingué x). On note $B := \vee_{i\in\mathbb{N}} S^1_i$.
   (a) Soit $P = \prod_{i\in\mathbb{N}} S^1_i$ le produit des S^1, muni de la topologie de Tychonoff[1]. Montrez que B n'est *pas* homéomorphe au sous-espace $Y \subset P$ défini par :
   $$Y := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(\{x\} \times \cdots \times \{x\} \times S^1_i \times \{x\} \times \ldots\right) \quad .$$
   (b) La *boucle d'oreille hawaienne* est le sous-ensemble $H \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des cercles de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$, pour $n \geq 1$ (faites un dessin). Montrez que B n'est pas homéomorphe à H.

1. Rappel : si (X_α) est une famille d'espaces topologiques, la topologie de Tychonoff sur $\prod X_\alpha$ est la topologie dont les ouverts sont réunion d'ensembles du type $\prod U_\alpha$ où les U_α sont tous égaux à X_α, sauf un nombre fini qui sont des ouverts de X_α. Une application $f : X \to \prod X_\alpha$ est continue si et seulement si ses coordonnées le sont. Le *théorème de Tychonoff* affirme qu'un produit d'espaces compacts, muni de la topologie de Tychonoff, est compact.

Exercice 4. Espaces projectifs.

On rappelle que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'espace $\mathbb{K}P^n$ est le quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$ agissant par homothéties.

1. Montrez que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à S^1 et que $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à S^2.
2. (a) Le sous-groupe $\{\pm 1\}$ de $\mathbb{R}^*$ agit sur S^n par multiplication. Montrez que le quotient $S^n/\{\pm 1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^n$.

   (b) Le sous-groupe S^1 de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes de module 1 agit sur $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par multiplication. Montrez que le quotient S^{2n+1}/S^1 est homéomorphe à $\mathbb{C}P^n$.
3. Montrez que $\mathbb{R}P^{n+1}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^n \cup_p D^{n+1}$, où $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ est la projection quotient obtenue à la question précédente. Montrez de même que $\mathbb{C}P^{n+1} = \mathbb{C}P^n \cup_p D^{2n+2}$.
4. Montrez que $\mathbb{R}P^n$, resp. $\mathbb{C}P^n$ est une variété topologique séparée et compacte de dimension n, resp. $2n$.

Exercice 5. Tore.

Le tore est l'espace topologique T, quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) = (x,1)$ et $(0,y) = (1,y)$. Montrez que T est homéomorphe aux espaces suivants.

(a) Le produit $S^1 \times S^1$.

(b) Le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du groupe discret $\mathbb{Z}^2$ agissant par translations.

(c) Le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$, qu'on peut obtenir comme image d'un point du cercle du plan $\{y = 0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1, par une rotation d'axe (Oz))

Exercice 6. Séparation des quotients.

1. Soit A un sous-espace compact d'un espace topologique séparé X. Montrez que X/A est séparé.
2. Trouvez un espace topologique séparé X et un sous espace A de X tel que X/A est non séparé.
3. Le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ agit sur $M_n(\mathbb{C})$ par conjugaison. Montrez que l'espace des orbites $M_n(\mathbb{C})/GL_n(\mathbb{C})$ est non séparé.

Exercice 7. Sphères et groupes orthogonaux.

On considère le groupe orthogonal $O_{n-1}(\mathbb{R})$ comme le sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$. Le groupe $O_{n-1}(\mathbb{R})$ agit sur $O_n(\mathbb{R})$ par multiplication à gauche. Montrez que le quotient $O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R})$ est homéomorphe à S^{n-1}.

Exercice 8. La droite à deux origines.

On appelle droite à deux origines l'espace topologique X obtenu en recollant deux copies de $\mathbb{R}$ le long du sous-espace $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrez que X est une variété topologique de dimension 1, non séparée.

Exercice 9. Connexité dans les variétés topologiques.

Soit X une variété topologique de dimension n.

1. Montrez que X est connexe si et seulement si X est connexe par arcs.
2. Montrez que si X est connexe et séparée, alors pour tous points x et y de X, il existe un homéomorphisme de X envoyant x sur y. (On pourra commencer par traiter le cas d'un disque ouvert de $\mathbb{R}^n$)

Exercice 10. Ecrasement inoffensif dans une variété topologique.

Soit X une variété topologique et soit $A \subset X$ une partie de X satisfaisant la propriété suivante. Il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de X contenant A et un homéomorphisme $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ qui envoie A homéomorphiquement sur un ensemble compact convexe. Montrez qu'il existe un homéomorphisme $\phi : X/A \to X$.

2 Rudiments de la théorie de l'homotopie

Exercice 11. Quelques exemples simples d'équivalences d'homotopie

1. Regroupez les lettres capitales de l'alphabet latin par type d'homotopie. (On admettra - ce qu'on démontrera dans le chapitre 1 du cours - que les lettres A, B et C ne sont pas homotopiquement équivalentes.)
2. Le *ruban de Moebius* est l'espace topologique M, quotient de $[0,1]\times[0,1]$ par l'identification $(x,0) = (1-x,1)$. Dessinez M. Montrez que M a le même type d'homotopie que S^1.
3. Soit X un espace topologique, et C un espace contractile. Montrez que $X \times C$ a le même type d'homotopie que X.
4. Montrez que $O_n(\mathbb{R})$ est un rétracte par déformation de $GL_n(\mathbb{R})$ (indication : utilisez Gram-Schmidt).

Exercice 12. Type d'homotopie d'un produit et d'un complémentaire

1. Si X et X', resp. Y et Y', sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents, montrez que $X \times Y$ et $X' \times Y'$ ont même type d'homotopie.
2. Soit E un sous-espace de dimension k de $\mathbb{R}^n$, avec $k < n$. Montrez que $\mathbb{R}^n \setminus E$ a le même type d'homotopie que S^{n-k-1}.
3. Soit C un sous ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$. Montrez que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a le même type d'homotopie que S^{n-1}. (indication : commencer par se ramener au cas où C est un convexe contenant 0 et contenu dans une boule de centre 0 et de rayon $1/2$).
4. Soit X un espace topologique, et A et B deux sous-espaces de X. Montrez que l'on peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.

Exercice 13. Recollement de rétractions par déformation

1. Soit X un espace et $A \subset B \subset X$. On suppose que A est un rétracte par déformation de B, et que B est un rétracte par déformation de X. Montrez que A est un rétracte par déformation de X.
2. Soient $\phi : A \to X$ et $\phi' : A \to X'$ deux plongements (applications continues qui induisent des homéomorphismes de A sur leurs images). On suppose que $\phi(A)$ (resp. $\phi'(A)$) est un rétracte par déformation de X resp. X'. Montrez que $X \cup_{\phi,\phi'} X'$ a le type d'homotopie de A.

Exercice 14. Décomposition de S^3 en tores pleins

Un *tore plein* est un espace homéomorphe à $S^1 \times D^2$. Dans cet exercice, on montre que S^3 est la réunion de 2 tores pleins le long de leur bord, et on utilise ce fait pour déterminer le type d'homotopie du complémentaire de deux cercles simplement enlacés dans S^3.

1. On considère les deux parties A et B de S^3 définies par :

$$A = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in S^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}\right\}\ , \quad B = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in S^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}\right\}\ .$$

   Montrez que l'application $\phi : A \to S^1 \times D^2$ définie par

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, (\sqrt{2}x_3, \sqrt{2}x_4)\right)$$

   est un homéomorphisme. Construisez de même un homéomorphisme $\psi : B \to S^1 \times D^2$, et montrez que $A \cap B$ est homéomorphe à $S^1 \times S^1$.
2. Soit C l'âme du tore A et C' l'âme du tore B (c'est à dire $C = \phi^{-1}(S^1 \times \{0\})$ et $C'\psi^{-1}(S^1 \times \{0\})$). Montrez que $S^3 \setminus (C \cup C')$ a le type d'homotopie d'un tore $S^1 \times S^1$.

Exercice 15. Homotopies et Cones.

Le cone CX d'un expace topologique X est l'espace quotient obtenu en écrasant le sous espace $X \times \{0\}$ de $X \times [0,1]$. Soit $q : X \times [0,1] \to CX$ l'application quotient. On note ι_X l'application

$$\begin{array}{rccc} \iota_X : & X & \to & CX \\ & x & \mapsto & q(x,1) \end{array} .$$

1. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrez que f est homotope à une application constante si et seulement s'il existe une application $F : CX \to Y$ telle que $F \circ \iota_X = f$
2. Montrez que CS^n est homéomorphe à D^{n+1}.
3. Montrez que pour tout espace X, le cone CX est contractile.

☕Exercice 16. Rétractions

Une *rétraction* d'une application continue $f : A \to X$ est une application continue $r : X \to A$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}$.

1. Soit $A \subset X$. Montrez que s'il existe une rétraction par déformation de X sur A, alors il existe une rétraction de l'inclusion $A \hookrightarrow X$. Montrez que la réciproque est fausse.
2. Montrez que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration si et seulement si l'inclusion $A \times I \cup X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I$ admet une rétraction. Déduisez-en que si $X \subset Y \subset Z$ et si $X \hookrightarrow Y$ et $Y \hookrightarrow Z$ sont des cofibrations, alors $X \hookrightarrow Z$ l'est également.

☕Exercice 17. Cofibrations et prolongement des applications

Soit $A \hookrightarrow X$ une cofibration, et $f, g : A \to Y$ deux applications continues homotopes. Montrez que f admet un prolongement par continuité à X tout entier si et seulement si g admet un prolongement par continuité à X tout entier. Trouvez un contre-exemple à cette équivalence si $A \hookrightarrow X$ n'est pas une cofibration.

Exercice 18. Composantes connexes par arcs des espaces fonctionnels.

Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique. On note $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Montrez que deux fonctions f, g sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $\mathcal{C}(X,Y)$ si et seulement si elles sont homotopes.

☕Exercice 19. Groupes de matrices

Pour les groupes de matrices suivants, déterminez s'ils sont compacts ou non, et déterminez leur π_0 :

$$GL_n(\mathbb{C}) \ , \ GL_n(\mathbb{R}) \ , \ O_n(\mathbb{R}) \ , \ SO_n(\mathbb{R}) \ , \ U_n(\mathbb{C}) \ , \ SU_n(\mathbb{C}) \ .$$

Exercice 20. Un groupe topologique homotopiquement commutatif

On note $GL_\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices infinies de la forme $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_\infty \end{bmatrix}$.

On note $i_n : GL_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_\infty(\mathbb{R})$ l'inclusion donnée par $A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_\infty \end{bmatrix}$. On munit $GL_\infty(\mathbb{R})$ de la topologie où un sous-ensemble U est ouvert si et seulement si pour tout n, $i_n^{-1}(U)$ est ouvert.

1. Montrez que le produit de matrices et la fonction inverse d'une matrice de $GL_\infty(\mathbb{R})$ sont continues (c'est à dire, $GL_\infty(\mathbb{R})$ est un *groupe topologique*).
2. Calculez $\pi_0(GL_\infty(\mathbb{R}))$.
3. Montrez que les applications suivantes sont homotopes.

$$\begin{array}{rccc} f : & GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_{2n}(\mathbb{R}) \\ & A, B & \mapsto & \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g : & GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_{2n}(\mathbb{R}) \\ & A, B & \mapsto & \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Montrez que $GL_\infty(\mathbb{R})$ est homotopiquement commutatif, c'est à dire que que les applications $(A,B) \mapsto AB$ et $(A,B) \mapsto BA$ sont homotopes.