Topologie algébrique
2013-2014.

TD : feuille n°3
Revêtements

Les exercices marqués du symbole ☕ sont des exercices à faire en priorité.

Exercice 1. Propriétés topologiques de la base et de l'espace total

Soit $p : E \to B$ un revêtement.

1. Montrez que E est localement connexe (par arcs) si et seulement si B est localement connexe (par arcs)
2. Montrez que E est une variété topologique si et seulement si B est une variété topologique.
3. On suppose les fibres finies. Montrez que E est compact si et seulement si B est compact.
4. (a) Montrez que si B est séparé, alors E est séparé.
   (b) Montrez que la réciproque est fausse (on pourra considérer le revêtement obtenu en quotientant $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par l'action du groupe $\mathbb{Z}$ donnée par $n \cdot (x, y) = (2^n x, y/2^n)$: l'action de $\mathbb{Z}$ est totalement discontinue, mais les orbites des points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ ne sont pas séparables dans le quotient).

Exercice 2. Revêtements et homéomorphismes locaux

1. Montrez qu'un revêtement est un homéomorphisme local.
2. (a) Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme local, avec X séparé. On suppose que toutes les fibres de f sont finies de même cardinal. Montrez que f est un revêtement.
   (b) Donnez un exemple d'homéomorphisme local dont toutes les fibres sont dénombrables, mais qui n'est pas un revêtement.

Exercice 3. Hypothèse de connexité locale pour le relèvement des applications

Soit $C^- \subset \mathbb{R}^2$ le demi-cercle de centre 0 et de rayon 10 contenu dans le demi plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ la portion du graphe de la fonction $\sin(1/x)$ pour $x \in]0, 1/2\pi]$, et $\overline{S}$ son adhérence dans $\mathbb{R}^2$. Le pseudo-cercle X est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par (faites un dessin !)

$$X = [-10, 0] \cup \overline{S} \cup [1/2\pi, 10] \cup C^- \ .$$

1. Soit $x \in X$. Montrez que $\pi_1(X, x) = \{1\}$.
2. La projection sur l'axe des abscisse $\overline{S} \to [0, 1/2\pi]$, induit une application continue de X sur $C^- \cup [-10, 10] \simeq S^1$. Montrez que cette application ne se relève pas en une application $X \to \mathbb{R}$.

Exercice 4. Produits de revêtements

Montrez qu'un produit fini de revêtement est un revêtement, mais que c'est faux pour un produit infini (on pourra examiner le cas du produit dénombrable de copies de $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$).

Exercice 5. Construction de revêtements par recollement

Soit F un espace discret. Soit B un espace connexe, muni d'un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$, et pour tout couple (i, j) tel que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, d'une application continue $g_{j,i} : V_i \cap V_j \to \mathfrak{S}(F)$. On suppose de plus que les $g_{j,i}$ vérifient la relation de cocycle :

$$g_{k,j}(x) g_{j,i}(x) = g_{k,i}(x) \ \text{ pour tout } x \in V_i \cap V_j \cap V_k.$$

1. On note $\Sigma = \bigsqcup_{i \in I} V_i \times F$. On définit une relation binaire R sur Σ par $(x, f) R (x', f')$ si et seulement si $x = x'$ et $f' = g_{j,i}(x) f$ (avec $x \in V_i$, $x' \in V_j$).
   (a) Montrez que R est une relation d'équivalence sur Σ.

(b) Montrez que l'application $\Sigma \to B$ qui envoie $(x, f) \in V_i \times F$ sur x, induit un revêtement $\Sigma/R \to B$.

2. Montrez que le revêtement $\Sigma/R \to B$ ainsi construit est l'unique revêtement de B, à isomorphisme près, possédant des trivialisations $\Phi_i : p^{-1}(V_i) \to V_i \times F$ telles que

$$\Phi_j \Phi_i^{-1}(x, f) = (x, g_{j,i}(x) f) \text{ pour } (x, f) \in (V_i \cap V_j) \times F.$$

Exercice 6. Action de groupes, revêtements et propriétés topologiques de la base

Soit E un espace topologique séparé et localement compact. Soit G un groupe agissant par homéomorphismes sur E. On suppose que l'action de G est
- *Propre* : Pour tout compact $K \subset E$, l'ensemble $G_K := \{g \in G \,|gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.
- *Libre* : Pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$, si $gx = x$ alors g est l'élément neutre de G.

1. Montrez que sous ces conditions, l'action de G est totalement discontinue (donc $E \twoheadrightarrow E/G$ est un revêtement).
2. Montrez que le quotient E/G est séparé et localement compact.

☕Exercice 7. Morphismes de revêtements

1. Soit $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux revêtements. On suppose que E' est connexe par arcs. Soit $h : E \to E'$ un morphisme de revêtements. Montrez que h est surjective, puis que h est un revêtement.
2. Montrez qu'un endomorphisme d'un revêtement galoisien est un isomorphisme.

Exercice 8. Applications vers un produit de cercles

Soit V une variété topologique de groupe fondamental fini, et soit $f : V \to (S^1)^{\times n}$ une application continue. Montrez que f est homotopiquement triviale.

Exercice 9. Variétés topologiques de groupe fondamental fixé

Construisez une variété topologique compacte de dimension 3 dont le groupe fondamental est cyclique (on pourra distinguer le cas d'un groupe infini, et le cas d'un groupe fini).

☕Exercice 10. Revêtement des graphes et groupes libres

1. Soit $p : E \to B$ un revêtement de fibres finies. On suppose que B est un graphe fini. Montrez que E est un graphe fini.
2. Soit L un groupe libre à n générateurs et H un sous-groupe d'indice k de L. Montrez que H est un groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.
3. Montrez que tout groupe libre à n générateurs peut être réalisé comme un sous-groupe du groupe libre à deux générateurs.

Exercice 11. Revêtement universel de $SO_3(\mathbb{R})$

Notons H_0 l'ensemble des matrices hermitiennes de trace nulle dans $M_2(\mathbb{C})$. On munit H_0 du produit scalaire correspondant au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ via l'isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & H_0 \\ (x, y, z) & \mapsto & \begin{bmatrix} x & y + iz \\ y - iz & -x \end{bmatrix} \end{array}.$$

1. Montrez que l'application $SU_2(\mathbb{C}) \times H_0 \to H_0$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ définit une action linéaire de $SU_2(\mathbb{C})$ sur H_0, par des morphismes préservant le produit scalaire. En déduire un morphisme de groupes continu $\phi : SU_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{R})$, de noyau $\{\pm \mathrm{Id}\}$.
2. Montrez que ϕ est surjective.
3. Montrez que ϕ est un revêtement de $SO_3(\mathbb{R})$ et calculer le groupe fondamental de $SO_3(\mathbb{R})$.

☕Exercice 12. Revêtements d'un bouquet de deux cercles

1. Déterminez le revêtement universel d'un bouquet de deux cercles.
2. Déterminez tous les revêtements à deux feuillets du bouquet de deux cercles. Montrez qu' un revêtement à deux feuillets, d'espace total connexe est toujours galoisien.
3. Déterminez tous les revêtements connexes à trois feuillets du bouquet de deux cercles. Lesquels sont galoisiens ?

Exercice 13. Revêtement universel de la bouteille de Klein et ses automorphismes

On rappelle que la bouteille de Klein est la surface topologique K obtenue comme quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x,0) = (1-x,1)$ et $(0,y) = (1,y)$.

1. Montrez que le groupe fondamental de K est le quotient d'un groupe libre à deux générateurs α, β, par la relation $\alpha\beta\alpha = \beta$ (utilisez l'exercice dans lequel on a déterminé le groupe fondamental de la bouteille de Klein).
2. Montrez que K est le quotient de $\mathbb{R}^2$ sous l'action du sous-groupe G des transformations affines du plan engendré par les applications $t : (x,y) \mapsto (x+1,y)$ et $s : (x,y) \mapsto (-x,y+1)$.
3. Montrez que la seule relation entre les éléments t et s de G est $tst = s$.