TD : feuille n°4
Complexes et homologie

Les exercices marqués du symbole ☕ sont des exercices à faire en priorité.

☕Exercice 1. Exemples élémentaires de complexes

1. Soient $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de groupes abéliens. Construisez l'exemple le plus simple possible d'un complexe de groupe abéliens C_*, tel que $H_n(C_*) = A_n$. Même question en imposant en plus que les C_i sont des groupes abéliens libres [1].
2. Construisez un complexe de groupes abéliens C_* tel que les C_i ne sont pas des groupes abéliens de type fini, mais dont tous les groupes d'homologie $H_k(C)$ sont des groupes abéliens de type fini.

☕Exercice 2. Caractéristique d'Euler d'un complexe

1. Soit $\Bbbk$ un corps, et soit C_* un complexe de $\Bbbk$-espaces vectoriels tel que : (i) C_k est de dimension finie pour tout $\Bbbk$, et (ii) $C_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indice i. On appelle caractéristique d'Euler de C_* le nombre
$$\chi(C) = \sum (-1)^k \dim_{\Bbbk} H_k(C) \ .$$
Montrez que $\chi(C) = \sum(-1)^k \dim_{\Bbbk} C_k$.
2. Soit C_k un espace vectoriel de dimension k. Montrez qu'il n'existe pas de suite exacte longue de la forme
$$0 \to C_{200} \to C_{360} \to C_{359} \to C_{358} \to \cdots \to C_2 \to C_1 \to 0 \ .$$

☕Exercice 3. Suites exactes courtes

Soit $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ une suite exacte courte de R-modules.

1. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes
   (a) Il existe un diagramme commutatif dont les morphismes verticaux sont des isomorphismes, et où $i : A \to A \oplus C$ est l'inclusion canonique et $q : A \oplus C \to C$ la projection sur le facteur direct C.
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\simeq"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & A \oplus C \arrow[r, "q"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
   (b) Il existe un morphisme $s : C \to B$ tel que $g \circ s = \mathrm{Id}$.
   (c) Il existe un morphisme $r : B \to A$ tel que $r \circ f = \mathrm{Id}$.
2. Montrez que si C est un R module libre, alors les conditions précédentes sont satisfaites.

Exercice 4. Complexes d'homologie triviale

Soit C_* un complexe de R-modules libres tel que $C_i = 0$ pour $i < 0$ et $H_k(C) = 0$ pour tout k. Montrez qu'il existe des groupes abéliens $(Z_i)_{i\geq -1}$ tels que C_* est isomorphe au complexe D_* défini par $D_i = Z_i \oplus Z_{i-1}$ et la différentielle $d_i : D_i \to D_{i-1}$ envoie Z_{i-1} sur 0 et la copie de $Z_i \subset D_i$ identiquement sur la copie de $Z_i \subset D_{i-1}$.

1. On rappelle que sur un anneau principal R, tout sous-module d'un R-module libre est libre (voir par exemple le livre de Lang, Algèbre).

☕Exercice 5. Applications usuelles des suites exactes longues

Soit C_* un sous-complexe de D_*.

1. Montrez que l'inclusion $\iota_* : C_* \to D_*$ induit des morphismes $H_n(\iota)$ injectifs (resp. surjectifs) pour tout n si et seulement si l'application quotient $q_* : D_* \to (D/C)_*$ induit des morphismes $H_n(q)$ surjectifs (resp. nuls) pour pour tout n.
2. Montrez que l'inclusion $\iota_* : C_* \to D_*$ induit des isomorphismes $H_n(\iota)$ pour tout n si et seulement si $H_n(D/C) = 0$ pour tout n.

☕Exercice 6. Lemme des cinq

1. Démontrez le lemme des cinq : si dans le diagramme commutatif de R-modules suivant, les lignes sont exactes et f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

2. Soit un diagramme commutatif de complexes de chaînes de R-modules, dont les lignes sont des suites exactes courtes de complexes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_* \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*"] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "\psi_*"] & C''_* \arrow[r] \arrow[d, "\rho_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D'_* \arrow[r] & D_* \arrow[r] & D''_* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Montrez que si deux des trois morphismes ϕ_*, ψ_*, ρ_* induisent des isomorphismes en homologie alors le troisième également.

Exercice 7. Lemme des neuf

On considère le diagramme de R-modules suivants, dont les lignes sont exactes et dont toutes les colonnes sauf une sont également exactes. Montrez que la dernière colonne est exacte.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

☕Exercice 8. Un exemple de théorème de coefficients universels

Si A est un groupe abélien et n un entier, on note ${}_nA$ sa partie de n-torsion, c'est à dire ${}_nA = \{a \in A \,|na = 0\}$ et A/n sa réduction modulo n (c'est à dire le groupe quotient de A par le sous-groupe nA).

1. Soit C_* un complexe de groupes abéliens libres. Montrez que pour tout i, l'homologie de C_* et l'homologie de C_*/n sont reliées par une suite exacte courte
$$0 \to H_i(C)/n \to H_i(C/n) \to {}_nH_{i-1}(C) \to 0\ .$$
2. Soit $f_* : C_* \to D_*$ un morphisme entre complexes de groupes abéliens libres, et soit $f_*/n : C_*/n \to D_*/n$ le morphisme induit sur les réductions modulo n des complexes. Montrez que si $H_i(f)$ est un isomorphisme pour tout i alors $H_i(f/n)$ est un isomorphisme pour tout i. Montrez que la réciproque est fausse.

Exercice 9. Un exemple de complexe en théorie des groupes

Soit G un groupe, et soit M une représentation de G (c'est à dire un groupe abélien muni d'une action additive de G, qu'on notera $\bullet$). Pour tout n positif ou nul, on note $C_{-n}(G,M)$ le groupe abélien des fonctions de $G^{\times n}$ dans M (par convention $G^{\times 0} = \{1\}$). Pour tout entier strictement négatif n, on pose $C_{-n}(G,M) = 0$. On définit un morphisme de groupes abéliens

$$\partial_{-n} : C_{-n}(G,M) \to C_{-n-1}(G,M)$$

de la façon suivante. Pour toute fonction $f : G^{\times n} \to M$ la fonction $\partial_{-n} f : G^{n+1} \to M$ est donnée par la formule :

$$(\partial_{-n} f)(g_1,\dots,g_{n+1}) := g_1 \bullet f(g_2,\dots,g_n) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1,\dots,g_n)$$

1. Montrez que $(C_*(G,M),\partial)$ est un complexe. Le $(-n)$-ième groupe d'homologie de $C_*(G,M)$ s'appelle *le n-ième groupe de cohomologie de G à coefficients dans M* et est souvent noté $H^n(G,M)$ (un exposant n en cohomologie est donc équivalent à un indice $-n$ en homologie).
2. Montrez que $H^0(G,M)$ est isomorphe au sous-groupe abélien de M formé des points fixes sous l'action du groupe G.
3. On suppose que la représentation M est munie d'une action triviale (c'est à dire $g \bullet m = m$ pour tout $g \in G$ et tout $m \in M$). Montrez que $H^1(G,M)$ est isomorphe au groupe abélien formé des morphismes de groupes de G dans M.
4. Montrez que si on a trois représentations M', M, M'' de G, et une suite exacte courte de groupes abéliens $0 \to M' \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M'' \to 0$ telle que les f_i sont G-équivariantes (c'est à dire $f_i(g \bullet m) = g \bullet f_i(m)$ pour tout m et tout g), alors on a une suite exacte longue en cohomologie :

$$0 \to H^0(G,M') \xrightarrow{H^0(f_1)} H^0(G,M) \xrightarrow{H^0(f_2)} H^0(G,M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G,M') \xrightarrow{H^1(f_1)} \cdots$$

Exercice 10. Cones et equivalences d'homologie

Soit C_* un complexe de chaînes de R-modules. La suspension de C est le complexe de chaines noté $(sC)_*$ défini par $(sC)_0 = 0$, $(sC)_{i+1} = C_i$ pour $i \geq 0$, dont la différentielle $(sC)_{i+1} \to (sC)_i$ est égale à $-d_C$.

Soit $f_* : C_* \to D_*$ un morphisme de complexes de chaines de R-modules. Le cone de f_* est le complexe de chaines noté $C(f)_*$, défini par : $C(f)_0 = D_0$, $C(f)_{i+1} = C_i \oplus D_{i+1}$ pour $i \geq 0$, et la différentielle envoie $(x,y) \in C_i \oplus D_{i+1}$ sur le couple $(-d_C(x), d_D(y) + f_i(c)) \in C_{i-1} \oplus D_i$.

1. Vérifiez que $C(f)_*$ est bien un complexe de chaines.
2. Montrez qu'on a une suite exacte courte de complexes $0 \to D_* \to C(f)_* \to (sC)_* \to 0$. Déduisez-en qu'on a une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \to H_i(D) \to H_i(C(f)) \to H_{i-1}(C) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(D) \to \dots$$

   et montrez que le connectant ∂ est égal à l'application $H_{i-1}(f)$. Montrez que f_* induit une équivalence en homologie si et seulement si le cone de f_* a une homologie triviale.

Exercice 11. Cones et equivalences d'homotopies

Soit $f_* : C_* \to D_*$ un morphisme de complexes de chaînes de R-modules, et $C(f)_*$ son cone (voir exercice précédent). On suppose que $C(f)_*$ est contractile.

1. Montrez que l'injection $D_* \to C(f)_*$ est homotope à zéro. Déduisez-en que f admet un inverse homotopique à droite.
2. Montrez que la surjection $C(f)_* \to (sC)_*$ est homotope à zéro. Déduisez-en que f admet un inverse homotopique à gauche, puis que f est une équivalence d'homotopie.

Exercice 12. Equivalences d'homologie vs équivalences d'homotopie

1. Montrez qu'une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes induit une équivalence en homologie, mais que la réciproque est fausse en général.
2. Soit C_* un complexe de chaînes de R-modules, dont tous les objets C_i, $i \geq 0$ sont des R-modules libres. On suppose de plus que l'homologie de C_* vaut zéro en tout degré. Montrez que C_* est contractile.
3. Soit $f_* : C_* \to D_*$ un morphisme de complexes. On suppose que les objets C_i et D_i, $i \geq 0$ sont des R-modules libres. Montrez que f_* induit une équivalence en homologie si et seulement si f_* est une équivalence d'homotopie.