TD : feuille n°5
Homologie singulière

Les exercices marqués du symbole ☕ sont des exercices à faire en priorité. Les résultats de certains d'entre eux seront utilisés dans des cours ou dans des exercices ultérieurs.

1 Deux outils théoriques

☕Exercice 1. Suite exacte longue d'un triplet

Soient $A \subset B \subset X$ des inclusions d'espaces topologiques. Montrez qu'il existe une suite exacte longue :

$$\cdots \to H_i(B, A; R) \to H_i(X, A; R) \to H_i(X, B; R) \to H_{i-1}(B, A; R) \to \dots$$

Exercice 2. Suite de Mayer-Vietoris relative

Soit X un espace topologique, et A, B deux ouverts de X. Notons $\mathcal{U} = \{A, B\}$ le recouvrement correspondant de $A \cup B \subset X$ et $C_*^{\mathcal{U}}(A \cup B; R)$ le complexe des chaînes $\mathcal{U}$-petites associé.

1. Montrez qu'on a un diagramme commutatif de complexes, dont les lignes et les colonnes sont exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_*(A \cap B; R) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(A; R) \oplus C_*(B; R) \arrow[r] \arrow[d] & C_*^{\mathcal{U}}(A \cup B; R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*(X; R) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(X; R) \oplus C_*(X; R) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(X; R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{C_*(X;R)}{C_*(A\cap B;R)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{C_*(X;R)}{C_*(A;R)} \oplus \frac{C_*(X;R)}{C_*(B;R)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{C_*(X;R)}{C_*^{\mathcal{U}}(A\cup B;R)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

2. Montrez qu'on a une suite exacte longue en homologie :

$$\cdots \to H_i(X, A \cap B; R) \to H_i(X, A; R) \oplus H_i(X, B; R) \to H_i(X, A \cup B; R) \to H_{i-1}(X, A \cap B; R) \to \dots$$

2 Théorie du degré

☕Exercice 3. Calcul du degré.

Soit $n \geq 1$ et $f : S^n \to S^n$ une application continue. On rappelle que le degré de f est le nombre entier $\deg(f)$ tel que pour tout $z \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$, $H_n(f)(z) = \deg(f)z$.

1. Montrez que si $\deg(f) \neq 0$ alors f est surjective. Donnez un contre-exemple à la réciproque. Montrez que si f est injective, alors $\deg(f) = \pm 1$ (on admettra le théorème de l'invariance du domaine). Donnez un contre-exemple à la réciproque.
2. On identifie S^1 au cercle unité de $\mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrez que le quotient $S^1/\{e^{2in\pi/k} | 1 \leq n \leq k\}$ est homéomorphe à un bouquet de k cercles, et déduisez-en que le degré de l'application $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$ (resp. $z \mapsto (1/z)^k$) est égal à k (resp $-k$).

3. Soit $A \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, qu'on restreint en une application $A : S^n \to S^n$. Montrez que $\deg(A) = \det(A)$.
4. Montrez que le degré d'une application $f : S^n \to S^n$ est égal au degré de sa suspension $\Sigma f : S^{n+1} \to S^{n+1}$. Deduisez en que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe une application continue $f : S^n \to S^n$ dont le degré vaut k.

☕**Exercice 4. Applications du degré.**

1. **Points fixes et points antipodaux.**
   (a) Montrez que toute application continue $f : S^n \to S^n$ sans point fixe est homotope à l'antipode (on peut remarquer que pour une telle application f l'origine 0 de $\mathbb{R}^{n+1}$ n'appartient jamais au segment $[f(x), -x]$).
   (b) Montrez que si $f : S^{2n} \to S^{2n}$ est une application continue, alors soit f admet un point fixe, soit il existe $x_0 \in S^{2n}$ tel que $f(x_0) = -x_0$.
2. **Groupes agissant librement.** Soit G un groupe agissant librement sur S^{2n}par homémorphismes. Montrez que G est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. **Champs de vecteurs.**
   (a) Montrez qu'il existe sur S^{2n+1} un champ de vecteurs tangents continu partout non nul.
   (b) Montrez le 'théorème de la boule chevelue' : sur S^{2n}, tout champ de vecteurs tangents continu s'annule au moins en un point. (Si v_x est un champ de vecteurs tangents, on pourra considérer la fonction $f(x) = v_x/||v_x||$).

3 Quelques calculs pratiques

Exercice 5. Homologie du parachute

Calculez l'homologie du 'parachute' obtenu en recollant les trois sommets de Δ^2.

☕**Exercice 6. Tore et bouquets de sphères**

Montrez que le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ a les mêmes groupes d'homologie singulière que le bouquet $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

Exercice 7. Homologie de la bouteille de Klein

Calculez l'homologie de la bouteille de Klein.

Exercice 8. Homologie de quelques espaces 'pathologiques'

1. Calculez l'homologie de la droite à deux origines, et plus généralement de la droite à n origines.
2. Calculez l'homologie de l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $\sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Exercice 9. Homologie du tore à g trous.

1. Soit X_g une sphère dont on a retiré $2g$ petits disques D_i^2, $1 \leq i \leq 2g$. Calculez l'homologie de X_g, ainsi que l'application induite en homologie par $\bigsqcup S_i^1 \hookrightarrow X_g$.
2. Calculez l'homologie du tore à g-tous S_g.

Exercice 10. Homologie du tore à g trous (bis).

Soit S_g le tore à g trous et $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ deux ensembles de points distincts de S_g.

1. Calculez l'homologie de $S_g \setminus X$.
2. Calculez l'homologie du quotient S_g/Y.
3. Calculez l'homologie de $(S_g \setminus X)/Y$.

☕Exercice 11. Suspensions et H-coespaces

Soit X un espace topologique. Son cone CX est l'espace quotient $X \times I/X \times \{1\}$. Sa suspension est l'espace quotient $CX/X \times \{0\}$ (faites un dessin).

1. Calculez l'homologie du cone de X et de la suspension de X en fonction de l'homologie de X.

On appelle H-coespace un espace pointé (X, x), muni d'une application $\delta : X \to X \vee X$ tel que si p_i designe la projection du bouquet sur son i-ième facteur, on a $p_i \circ \delta \sim \mathrm{Id}_X$ $(i = 1, 2)$. Notons $p : X \vee X \to X$ l'application dont la restriction à chacun des facteurs du bouquet vaut Id_X.

2. Montrez que la suspension d'un espace est un H-coespace.
3. Soit (X, x) un H-coespace et $f, g : (X, x) \to (X, x)$. Montrez que pour tout $n \geq 1$, l'application $\overline{H}_n(f)+\overline{H}_n(g)$ est égale à l'application induite en homologie par la composée
$$X \xrightarrow{\delta} X \vee X \xrightarrow{f \vee g} X \vee X \xrightarrow{p} X$$
Déduisez que si X est un H-coespace alors pour tout $k \geq 0$ il existe $f : X \to X$ telle que $H_n(f)$ est la multiplication par k pour tout $n \geq 1$.

Exercice 12. Produit et smash produit par une sphère

Soit (X, x) un espace topologique pointé et $n \geq 1$.

1. Calculez $H_*(X \times S^n; R)$ en fonction de $H_*(X; R)$.
2. Montrez que pour $k \geq 0$ les R-modules d'homologie $H_i((S^n)^{\times k}; R)$ sont libres et donner leur rang.
3. Le smash produit $S^d \wedge X$ est le quotient $S^d \times X/S^d \vee X$. On suppose qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}_x$ contenant x qui se rétracte par déformation sur X. Calculez l'homologie de $S^d \wedge X$.

4 Théorèmes de Brouwer et Borsuk-Ulam

Exercice 13. Applications du théorème de Brouwer

1. **Un théorème de point fixe.** Montrez que toute application homotopiquement triviale $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ admet un point fixe.
2. **Théorème de Perron-Frobenius.** Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de taille n, inversible et à coefficients $a_{i,j} \geq 0$. Montrez que A admet une valeur propre strictement positive associée à un vecteur propre dont les coordonnées sont positives ou nulles. (Indication : considérez l'application $\Delta^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$.)
3. **Un théorème des valeurs intermédiaires.** Soit $f : [0, 1]^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, dont on note f_i les composantes. On suppose que pour tout i, et pour tout $x_1, \dots, x_n$ on a :
$$f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0\ .$$
Montrez qu'il existe un point de $[0, 1]^n$ où f s'annule. (Indication : si a est un nombre réel, on pose $\overline{a} = \min\{1, \max\{0, a\}\}$. Utilisez la fonction $\phi(x_1, \dots, x_n) = (\overline{f_1(x_1, \dots, x_n) + x_1}, \dots, \overline{f_n(x_1, \dots, x_n) + x_n})$.)

☕Exercice 14. Transfert

1. Montrez que l'application de transfert $t : C_*(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C_*(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui envoie un simplexe σ sur la somme de ses relèvements est un morphisme de complexes. Montrez qu'on a une suite exacte longue :
$$\cdots \to H_i(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_i(t)} H_i(E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_i(p)} H_i(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_{i-1}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_{i-1}(t)} \to \dots$$
2. Calculez l'homologie modulo 2 des espaces projectifs réels.

☕Exercice 15. Theorême de Borsuk-Ulam

1. Supposons qu'il existe $f : S^m \to S^n$ avec $m > n \geq 1$, telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^m$.
   (a) Soit $\overline{f} : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ l'application induite entre espaces projectifs. Montrez que les applications $f, \overline{f}$ définissent un morphisme entre les suites exactes longues de transfert associées au revêtements à deux feuillets $S^m \to \mathbb{R}P^m$, $S^n \to \mathbb{R}P^n$.
   (b) Déduisez-en qu'une telle application f ne peut exister.
2. **Théorême de Borsuk-Ulam.** Soit $n \geq 1$. Montrez que pour toute application continue $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.

Exercice 16. Applications du théorême de Borsuk-Ulam

1. **Théorême de Lusternik Schnirelmann.** Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des fermés de S^n qui recouvrent S^n. Montrez que l'un d'entre eux contient deux points antipodaux.
2. **Théorême du sandwich au jambon.** Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles Lebesgue-mesurables bornés de $\mathbb{R}^n$. Montrez qu'il existe un hyperplan H qui coupe chaque A_i en deux parties de mesure égale.