TD : feuille n°6

Homologie sinpliciale, Homologie cellulaire, Théorème des coefficients universels.

Les exercices marqués du symbole ☕ sont des exercices à faire en priorité. Les résultats de certains d'entre eux seront utilisés dans des cours ou dans des exercices ultérieurs.

☕Exercice 1. Quelques calculs pratiques avec l'homologie cellulaire

Calculer l'homologie à coefficients $\mathbb{Z}$ des espaces suivants en utilisant une décomposition cellulaire.

1. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $n \geq 1$.
2. L'espace $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty = \cup_{n\geq 0}\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, muni de la topologie où $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ si et seulement si pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{U} \cap \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ est un ouvert de $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.
3. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.
4. le quotient de S^2 obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur.
5. Le parachute obtenu à partir du triangle Δ^2 en identifiant ses trois sommets.
6. Le tore à g trous S_g.

Exercice 2. Quelques calculs pratiques avec l'homologie cellulaire 2

Calculez l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des espaces suivants en utilisant une décomposition cellulaire.
1. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 2. $S^k \times S^\ell$ 3. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^2$

☕Exercice 3. Homologie cellulaire vs homologie simpliciale.

Donnez une triangulation de la sphère S^n et calculez l'homologie simpliciale associée. Comparez avec le complexe cellulaire donné par la décomposition de la sphère en deux cellules (une en dimension 0, une en dimension n).

☕Exercice 4. Influence des coefficients sur l'homologie

Trouvez deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$. De même trouvez deux espaces qui ont même homologie à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ mais pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

☕Exercice 5. Coefficients universels

1. Soit X un espace tel que
$$H_i(X,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \text{ ou } i = 3 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Calculez l'homologie de X à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour tout nombre premier p.
2. Soit X un CW-complexe fini tel que $H_i(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Donnez les possibilités pour l'homologie de X à coefficients entiers.

Exercice 6. Espaces à homologie prescrite

Soients $(A_i)_{i\geq 1}$ des groupes abéliens. Construisez un espace topologique connexe par arcs X tel que $H_i(X,\mathbb{Z}) = A_i$ pour tout i.

☕Exercice 7. Caractéristique d'Euler et application aux triangulations

La caractéristique d'Euler $\chi(X)$ d'un CW-complexe fini X est la somme alternée $\sum(-1)^i n_i$ où n_i est le nombre de cellules de dimension i.

1. Montrez que si $\Bbbk$ est un corps, $\chi(X) = \sum(-1)^i \dim H_i(X;\Bbbk)$.
2. Peut-on trianguler le tore avec une triangulation comportant 3678 faces, 5987 arêtes, et 2015 sommets ?
3. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$ un polyèdre régulier possédant s sommets, a arêtes, f faces, et dont toutes les faces ont p cotés et chaque sommet appartient à q faces. Montrez les égalités : $s + f - a = 2$, $qs = 2a$, $pf = 2a$. En déduire que $1/p + 1/q > 1/2$, puis faire la liste des couples p, q possibles.

Exercice 8. Structures cellulaires et revêtements

Soit X un CW-complexe fini, et $p : E \twoheadrightarrow X$ un revêtement à n feuillets. Montrez que E possède une structure de CW complexe dont on donnera le nombre de cellules de chaque dimension. Comparez $\chi(X)$ et $\chi(E)$.

Exercice 9. Fonctorialité du complexe cellulaire

Une application cellulaire entre deux CW-complexes X et Y est une application continue $f : X \to Y$ qui préserve les squelettes : $f(X_n) \subset Y_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrez qu'une application cellulaire induit un morphisme $f_*^{\mathrm{cell}} : C_*^{\mathrm{cell}}(X) \to C_*^{\mathrm{cell}}(Y)$ entre les complexes cellulaires, et montrez que l'application induite en homologie par f_*^{cell} s'identifie à l'application induite en homologie singulière par f.

Exercice 10. Attachement d'une cellule à un espace quelconque

Soit X un espace et $Y := X \cup_f D^n$ l'espace obtenu en rattachant une cellule de dimension n à X au moyen de $f : S^{n-1} \to X$. Montrez que l'inclusion $X \hookrightarrow Y$ induit un isomorphisme $H_i(X) \simeq H_i(Y)$ si $i \neq n, n-1$, et qu'on a une suite exacte longue :

$$0 \to H_n(X) \to H_n(Y) \to H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(Y) \to 0.$$

Exercice 11. Homologie simpliciale versus homologie singulière

Soit K un complexe simplicial géométrique de $\mathbb{R}^n$. On note K_ℓ son ℓ squelette, c'est à dire le sous-complexe simplicial géométrique formé des simplexes de K de dimension inférieure ou égale à ℓ.

1. Montrez qu'on peut réaliser le complexe $C_*^{\mathrm{simpl}}(K)$ comme un sous-complexe du complexe $C_*(|K|)$ des chaines singulières de $|K|$:
$$C_*^{\mathrm{simpl}}(K) \hookrightarrow C_*(|K|) \quad (*) .$$
2. Soit $\Delta^m \subset \mathbb{R}^m$ le simplexe standard. Montrez par récurrence sur m que l'application identité $\mathrm{Id} : \Delta^m \to \Delta^m$ fournit un générateur de l'homologie singulière $H_m(\Delta_m, \partial\Delta^m)$.
3. Montrez que l'inclusion $K_\ell \subset K_{\ell+1}$ induit pour tout ℓ des isomorphismes $H_i(C_*^{\mathrm{simpl}}(K_{\ell+1})/C_*^{\mathrm{simpl}}(K_\ell)) \xrightarrow{\simeq} H_i(|K_{\ell+1}|, |K_\ell|)$.
4. En déduire que l'inclusion $C_*^{\mathrm{simpl}}(K) \hookrightarrow C_*(|K|)$ induit un isomorphisme en homologie.

Exercices supplémentaires

1. Vérifiez avec la formule de Künneth les calculs de l'exercice 2, (2. et 3.), et donnez plus généralement l'homologie à coefficients entiers de $\mathbb{R}\mathrm{P}^k \times \mathbb{R}\mathrm{P}^\ell$.
2. Calculez à l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des espaces suivants :
   1. $SO_3(\mathbb{R})$ 2. $SL_3(\mathbb{R})$ 3. $GL_2(\mathbb{C})$.