TD numéro 3

Exercice 1. Les familles ci-dessous définissent-elles un préfaisceau ? Un faisceau ? (les morphismes de restrictions étant les restrictions usuelles)

1. Si X est un espace topologique, pour tout U ouvert de X, $\mathcal{F}(U)$ désigne l'ensemble des fonctions bornées sur U.
2. Si X est une variété différentielle, pour tout U ouvert de X, $\mathcal{F}(U)$ désigne l'ensemble des fonctions différentiables sur U.
3. Si X est une variété complexe, pour tout U ouvert de X, $\mathcal{F}(U)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.
4. Si X est une variété complexe, pour tout U ouvert de X, $\mathcal{F}(U)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur U admettant une racine carrée holomorphe.

Exercice 2. Soit $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux.

1. Montrer que le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{Ker}(\phi_U)$ est un faisceau.
2. Donner un exemple pour lequel les préfaisceaux $U \mapsto \mathrm{Im}(\phi_U)$ et $U \mapsto \mathrm{Coker}(\phi_U)$ ne sont pas des faisceaux.

Exercice 3. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace topologique X. Montrer que :

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F}, X) = \mathcal{F}(X),$$

où $\mathbb{Z}_X$ est le faisceau constant en groupe $\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. On note $\widetilde{\mathcal{F}}$ l'union disjointe des tiges $\mathcal{F}_x$ pour $x \in X$ (c'est l'*espace étalé* associé à $\mathcal{F}$). On a une projection naturelle $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$. Pour tout ouvert U de X et toute section $s \in \mathcal{F}(U)$, on définit une application $g_s : U \to \widetilde{\mathcal{F}}$ par $g_s(x) = s_x \in \mathcal{F}_x$. On définit alors une topologie (dite *topologie étale*) sur $\widetilde{\mathcal{F}}$ comme la topologie dont les ouverts sont les $g_s(U)$.

1. Montrer que, pour tout $x \in X$, la topologie induite sur $\mathcal{F}_x$ est la topologie discrète.
2. Montrer que g_s est un homéomorphisme de U sur son image.
3. Montrer que, pour tout U, $\mathcal{F}(U)$ est identifié à l'ensemble des applications continues $s : U \to \widetilde{\mathcal{F}}$ telles que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_U$.

Remarque On peut également définir l'espace étalé et la topologie étale lorsque $\mathcal{F}$ est seulement un préfaisceau. Dans ce cas, $\mathcal{F}^+(U) = \{s : U \to \widetilde{\mathcal{F}} \mid s \text{ continue, } \pi \circ s = \mathrm{Id}_U\}$ définit le faisceau associé à $\mathcal{F}$.

Exercice 5. Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Soient $s, t \in \mathcal{F}(X)$. Montrer que l'ensemble des $x \in X$ tels que $s_x = t_x$ est ouvert dans X.

Exercice 6. Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un préfaisceau en groupes abéliens sur X. Pour toute famille $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ d'ouverts de X, on définit une suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \xrightarrow[d_0]{} \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow[d_1]{} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)\ ,$$

définie par $d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_{i\in I}$ et $d_1 : (s_i)_{i\in I} \mapsto (s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un faisceau si et seulement si la suite ci-dessus est exacte pour toute famille d'ouverts de X.
2. Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. On pose $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(X) = \ker d_1$. Pour tout ouvert W de X, on définit de la même manière un groupe $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W)$ en considérant le recouvrement $\{W \cap U_i\}$ de W. Montrer que $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ est un préfaisceau sur X et que l'on a un morphisme de préfaisceaux $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$.
3. Soit $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ un autre recouvrement ouvert de X. On définit une relation d'ordre partielle sur les recouvrements ouverts par : $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$ si tout V_j est contenu dans un U_i. Montrer que l'on a un morphisme canonique $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(W) \to \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(W)$ pour tout ouvert W si $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$.
4. On pose
$$\mathcal{F}^+(W) = \varinjlim_{\mathcal{V}} \mathcal{F}_{\mathcal{V}}(W),$$
où l'image directe porte sur les recouvrements ouverts $\mathcal{V}$ de W. Montrer que $\mathcal{F}^+$ est le faisceau associé à $\mathcal{F}$.

Exercice 7. Soient U un ouvert d'un espace topologique X et $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. On définit $\Gamma(U, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(U)$.

1. Montrer que, pour une suite exacte de faisceaux sur X, $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$,
$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}') \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}'')$$
est une suite exactes de groupes.
2. Donner un exemple où $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ est un morphisme surjectif de faisceaux, mais où $\Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}'')$ n'est pas surjectif.

Exercice 8. [Faisceaux flasques]
Un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X est dit *flasque* si pour toute inclusion d'ouverts $V \hookrightarrow U$, l'homomorphisme de restriction $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ est surjectif.

1. Supposons que $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est une suite exacte de faisceaux sur X et $\mathcal{F}'$ est flasque, montrer que la suite de groupes
$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}') \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}'') \to 0$$
est aussi exacte pour tout ouvert U de X.
2. Supposons que $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est une suite exacte de faisceaux. Montrer que si $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ sont flasques alors $\mathcal{F}''$ est aussi flasque.
3. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un faisceau flasque sur X, alors $f_*\mathcal{F}$ est un faisceau flasque sur Y.

Exercice 9. Soit X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. On définit le *support* de $\mathcal{F}$ par :

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}.$$

On suppose ici que $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ est un ensemble fini de points fermés. Montrer que pour tout ouvert U de X on a $\mathcal{F}(U) = \oplus_{x\in U} \mathcal{F}_x$.