Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2014

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Algèbre V

Exercice 1. Déterminer lesquelles des structures suivantes forment des groupes avec les opérations données :

a) $(\{0,1\}, +)$ tel que $0+0=1+1=0$ et $0+1=1+0=1$.

b) $(\{0,1\}, \times)$ tel que $0\times 0=1\times 0=0\times 1=0$ et $1\times 1=1$.

c) $(\{0,1\}, *)$ tel que $0*0=1*1=1$ et $0*1=1*0=0$.

d) Les fonctions continues $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec la composition.

e) Les matrices 2×2 avec éléments réels avec la multiplication des matrices.

f) Les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec la multiplication des matrices.

g) Les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec l'addition des matrices.

h) Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec la multiplication des matrices.

i) Les racines n-ièmes de l'unité avec la multiplication.

Exercice 2. Déterminer dans chaque cas si A est un sous-groupe de B.

a) $A = (\{2k \mid k\in\mathbb{Z}\}, +)$ et $B=(\mathbb{Z},+)$.

b) $A = (\{2k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}, +)$ et $B=(\mathbb{Z},+)$.

c) $A = (\mathbb{Q}_{>0}, \times)$ et $B=(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\times)$.

d) $A = (\mathbb{Q},+)$ et $B=(\mathbb{R},+)$.

Exercice 3.

a) Montrer que l'ensemble des éléments de l'anneau $(A,+,\times)$ qui sont inversibles (pour $\times$) est un groupe multiplicatif. On le note $A^\times$.

b) Décrire $A^\times$ lorsque $A=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $A=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

c) Trouver l'inverse multiplicatif de 6 dans l'anneau $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Montrer que $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$ est isomorphe à $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times,\times)$.

Exercice 5. Si H et K sont deux sous-groupes d'un même groupe G, montrer que $H\cap K$ est un sous-groupe de G.

Exercice 6. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$

a) Déterminer tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$.

b) Soit n un entier, montrer que pour tout d divisant n, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ possède un unique sous-groupe d'ordre d. Montrer que ce sous-goupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Le théorème des restes chinois

Montrer que l'application :

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$k \mod mn \mapsto (k \mod m,\ k \mod n)$$

est un isomorphisme si m,n sont premiers entre eux. En déduire que si m,n sont premiers entre eux, $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 8. Sous-groupes multiplicatifs finis d'un corps

a) Soit G un groupe fini d'ordre n tel que pour tout diviseur d de n, il y ait au plus d éléments g de G vérifiant $g^d = 1$. Montrer que G est cyclique.

b) Montrer que si K est un corps commutatif et si G est un sous-groupe fini de $K^\times$, alors G est cyclique.

c) En déduire que si p est premier, alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

d) Déterminer les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^\times$.

e) Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{C}^\times$ d'indice fini. Même question avec $\mathbb{R}^\times$.

Exercice 9. Soit $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ le groupe des bijections affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (avec la loi de composition). On note T le sous-groupe des translations $t_b : x \mapsto x + b$, $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $T \simeq \mathbb{R}$ est distingué dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ et que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^\times$.

Exercice 10. Soit p un nombre premier.

a) Déterminer l'ordre du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

b) Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $(a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j} \bmod p)$ est un morphisme surjectif. En déduire l'ordre du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$.

c) Montrer que pour tout entier $n > 0$, le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est d'ordre

$$n^4 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Exercice 11. Structure de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

a) Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(\mathrm{pgcd}(n, m))\mathbb{Z}$

b) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Quel est l'ordre des groupes suivants : $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ (p premier), $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}))$ et $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})))$?

c) Soit p un nombre premier ($p \neq 2$), montrer que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un entier $\lambda \geq 1$, premier avec p, et tel que

$$(1 + p)^{p^k} = 1 + \lambda p^{k+1}$$

En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/p^{n-1}(p-1)\mathbb{Z}$.

d) En montrant que pour tout $k \geq 1$, $5^{2^k} = 1 + \lambda 2^{k+2}$ avec λ un entier impair, en déduire pour $n \geq 2$ l'isomorphisme

$$(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$$

e) Donner la structure de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Pour quelles valeurs de n est-il cyclique ?

Exercice 12. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

a) Montrer que $f(G)$ est un sous-groupe de G' et que $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe de G pour tout H sous-groupe de G'. En déduire que $\ker f$ est un sous-groupe de G.

b) Montrer que $G/\ker f \to f(G)$, $x \ker f \mapsto f(x)$ est un isomorphisme.

c) En déduire que si G est fini, alors :

$$|G| = |\ker f||f(G)| \ .$$

d) Reconnaître les groupes

$$S_n/A_n,\ O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}_+^\times \ .$$

e) Montrer les isomorphismes suivants :

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1,\ \mathbb{R}^\times/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{R}_+^\times,\ \mathbb{C}^\times/S^1 \simeq \mathbb{R}_+^\times,\ \mathbb{C}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}^\times \ .$$