Université Claude Bernard Lyon 1 - automne 2015

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Algèbre V Fiche 4

Exercice 1. Soient G et H deux groupes finis tels que G est isomorphe à un sous-groupe de H et H est isomorphe à un sous-groupe de G. Montrer que $G \simeq H$.

Exercice 2.

a) Soit G le groupe formé des suites infinies $(a_1, a_2, \dots)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec pour opération l'addition coordonnée par coordonnée. Montrer que $G \simeq G \times G$.

b) Soit $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G$. Montrer que H est isomorphe à un sous-groupe de G et que G est isomorphe à un sous-groupe de H, mais que G et H ne sont pas isomorphes. *Indication : dans H il existe un élément d'ordre 2 sans racine carrée !*

Exercice 3. Soit G le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ avec $n \geq 1$ et p premier.

a) Montrer que, pour deux bases données de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, il existe une unique matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de changement de bases entre ces deux bases.

b) En déduire que
$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i) = p^{n(n-1)/2}\prod_{i=0}^{n-1}(p^{n-i} - 1).$$

c) Montrer que les matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale forment un groupe de p-Sylow de G.

Exercice 4. Déterminer le nombre de 3-Sylow et de 5-Sylow de S_5.

Exercice 5. Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 7 dans un groupe simple d'ordre 168 ?

Exercice 6. a) Déterminer les groupes abéliens d'ordre 12 à isomorphisme près.

b) Déterminer explicitement les Sylow de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

c) Montrer que $D_6 \not\simeq \mathfrak{A}_4$.

d) Déterminer les Sylow de D_6 et de $\mathfrak{A}_4$.

e) À l'aide des produits semidirects trouver un groupe non abélien d'ordre 12 non isomorphe à D_6 ni à $\mathfrak{a}_4$.

f) Soit G un groupe non abélien d'ordre 12, montrer que $n_2 = 3$ et $n_3 = 1$ ou $n_2 = 1$ et $n_3 = 4$.

g) Soit G un groupe non abélien d'ordre 12. Si $n_3 = 4$, montrer que $G \simeq \mathfrak{A}_4$.

h) Soit G non abélien d'ordre 12 avec $n_3 = 1$. Montrer que $G \simeq D_6$ ou à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, l'unique produit semidirect non abélien de cette forme.

Exercice 7. Trouver tous les groupes d'ordre 15 à isomorphisme près.

Exercice 8. Soient $p < q < r$ trois nombres premiers. Soit G un groupe d'ordre pqr. On note n_q et n_r de q-Sylow et de r-Sylow de G.

a) Montrer que $n_q(q-1) + n_r(r-1) \leq pqr - 1$.

b) Montrer que $n_r = 1$ ou $n_r = pq$.

c) Montrer que $n_q = 1$ ou $n_q \geq r$.

d) En déduire que $n_q = 1$ ou $n_r = 1$ et donc G n'est pas simple.

Exercice 9. Soit G un groupe fini simple. Soit p un nombre premier divisant l'ordre de G. On note n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que G est un p-groupe ou $|G|$ divise $n_p!$.

Exercice 10. Le but de cet exercice est de démontrer que 60 est le plus petit ordre d'un groupe simple non abélien.

a) Montrer que si G est d'ordre p^k avec p premier et $k \geq 1$, alors G ne peut pas être non abélien et simple.

b) Montrer que si G est d'ordre $p^k m$ avec p premier, $k \geq 1$ et $m < p$, alors G ne peut pas être non abélien et simple.

c) Soit G un groupe d'ordre $2^p(2^p-1)$ avec p premier et $q = 2^p-1$ premier. Montrer que s'il a plus d'un q-Sylow dans G, alors le 2-Sylow est unique. (Indication : compter les éléments d'ordre q.)

d) Montrer qu'un groupe d'ordre 40 ou 45 n'est pas simple.

e) Déduire des questions précédentes que si G est un groupe non abélien et simple d'ordre < 60 alors G est d'ordre 24, 30, 36, ou 48. Utiliser les exercices précédents pour montrer qu'un groupe d'ordre 24, 30, 36 ou 48 n'est pas simple.

Exercice 11. Soit G un groupe simple d'ordre 60. Le but de cet exercice est de démontrer G est isomorphe à A_5.

a) Montrer que $n_2 \in \{5, 15\}$, $n_3 = 10$ et $n_5 = 6$ où n_p est le nombre de p-Sylow de G. (Utiliser l'exercice 9.)

b) On suppose que $n_2 = 5$. En utilisant l'action de G sur ses 2-Sylow, montrer que G est isomorphe à A_5.

c) On suppose que $n_2 = 15$.

   a) Compter les éléments d'ordre 3 et 5 dans G.
   b) Montrer qu'il existe deux 2-Sylow P et Q de G tels que $R = P \cap Q$ est d'ordre 2.
   c) Soit H le sous-groupe de G engendré par P et Q. Montrer que H est contenu dans le centralisateur de R.
   d) En déduire que l'indice de H dans G est 3 ou 5.
   e) En utilisant l'action de G sur les sous-groupes de G conjugués à H, montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S_3 ou de S_5.
   f) En déduire que G est isomorphe à A_5.

Exercice 12. Le but de cet exercice est de montrer que S_6 admet un automorphisme extérieur.

a) Le groupe S_5 agit par conjugaison sur ses 5-Sylow $\langle(12345)\rangle$, $\langle(12435)\rangle$, $\langle(12354)\rangle$, $\langle(12453)\rangle$, $\langle(12534)\rangle$, $\langle(12543)\rangle$. On définit $\phi : S_5 \to S_6$ qui associe à $\sigma \in S_5$ la permutation des 5-Sylow dans l'ordre donnée ci-dessus par la conjugaison par σ.

   a) Montrer que ϕ est un morphisme des groupes.
   b) Montrer que $\phi((34)) = (12)(34)(56)$.
   c) Calculer $\phi((345))$.
   d) Montrer que ϕ est injective.
   e) Montrer que $\phi(S_5) = H \simeq S_5$, $H \leq S_6$ et $(S_6 : H) = 6$.

b) Vérifier que S_6 agit de manière transitive sur les classes à gauche modulo H par multiplication à gauche.

c) On définit $f : S_6 \to S_6$ qui associe à chaque élément de S_6 la permutation des classes sous l'action de groupes donné ci-dessus (avec un ordre arbitraire fixé des classes).

   a) Montrer que f est un morphisme de groupes.
   b) Montrer que f est injectif et donc un automorphisme de S_6.
   c) Montrer que $(12)(34)(56)$ fixe la classe H et donc que $f((12)(34)(56))$ n'est pas dans la classe de conjugaison de $(12)(34)(56)$.
   d) En déduire que f n'est pas un automorphisme intérieur.

Exercice 13. Le but de cet exercice est de montrer que tous les automorphismes de S_n sont intérieurs pour $n \neq 6$.

a) Soit $n \geq 2$. Montrer qu'un automorphisme de S_n qui fixe la classe des transpositions est un automorphisme intérieur.

b) Pour $1 \leq k \leq n/2$, montrer que le nombre des permutations de type 2^k dans S_n est

$$\frac{1}{2^k}\frac{n!}{k!(n-2k)!}.$$

c) Montrer que pour $2 \leq k \leq n/2$, on a

$$k! \leq (n-k)\cdots(n-2k+1)$$

et, si de plus $n \geq 7$ et $k \geq 3$, alors

$$2^{k-1} < (n-2)(n-3)\cdots(n-k+1).$$

d) En déduire que les automorphismes de S_n pour $n \geq 7$ sont intérieurs.

e) Montrer que les automorphismes de S_n pour $n = 2, 3, 4$ et 5 sont intérieurs.