Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

MG1 - Algèbre commutative

Fiche de TD no 3

Exercice 1 (Sur le discriminant)**.** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{L}$ le corps de décomposition de P :
$P(X) = \sum_0^n a_i X^i = a_n \Pi_j (X - x_j)$ avec $a_i \in \mathbb{K}$ et $x_i \in \mathbb{L}$.
On pose $\delta = a_n^{n-1} \Pi_{i<j}(x_i - x_j)$ et $\Delta = \delta^2 = a_n^{2n-2} \Pi_{i<j}(x_i - x_j)^2$ le discriminant de P.

1. Justifier que Δ est un polynôme en coefficients de P, i.e. $\Delta \in \mathbb{Z}[a_0, \dots, a_n]$. En particulier, $\Delta \in K$.
2. Soit $P(X) = X^3 + pX + q$. Montrer que $\Delta_P = ap^3 + bq^2$ avec certains coefficients a, b qu'on déterminera.
3. Supposons $\Delta \neq 0$. Soit $g : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ un $\mathbb{K}$-automorphisme de L.
   Remarquer que g agit sur les racines $(x_1, \dots, x_n)$ par une permutation σ.
   Montrer que la permutation σ est paire si et seulement si $g(\delta) = \delta$.
   En déduire que σ est paire pour tout automorphisme de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ si et seulement si Δ est un carré dans K.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta_P \neq 0$. Soit $2s$ le nombre de ses racines non-réelles.
   Montrer que s est paire si et seulement si $\Delta_P > 0$.
   En particulier, si P est de degré 3, toutes ses racines sont réelles si et seulement si $\Delta_P > 0$.

Exercice 2 (Sur le résultant)**.** Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ qu'on écrit $P(X) = a\Pi_{i=1}^m (X - x_i)$, $Q(X) = b\Pi_{j=1}^n (X - y_j)$, où les racines x_i, y_j se trouvent dans une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$.
On rappelle que $\mathrm{Res}(P, Q) = a^n b^m \Pi_{i,j}(x_i - y_j)$.
On sait que $\mathrm{Res}(P, Q)$ est un polynôme en les coefficients de P et Q.

1. Soit $T(X) \in K[X]$. Soit $R_1(Z) = \mathrm{Res}_X(P(X), Z - T(X))$. Montrer que si α est une racine de $P(X)$, alors $T(\alpha)$ est une racine de $R_1(Z)$.
2. Soit $R_2(Z) = \mathrm{Res}_X(P(X), Q(Z - X))$. Montrer que si α est une racine de $P(X)$ et β une racine de $Q(X)$ alors $\alpha + \beta$ est une racine de $R_2(Z)$.
3. Soit $R_3(Z) = \mathrm{Res}_X(P(X), X^n Q(\frac{Z}{X}))$ (où n est le degré de Q). Montrer que si α est une racine de $P(X)$ et β une racine de $Q(X)$, alors $\alpha\beta$ est une racine de $R_3(Z)$.
4. Soit $T(X, Y) \in K[X, Y]$. Soit $R_4(Z) = \mathrm{Res}_X\Big(P(X), \mathrm{Res}_Y\big(Z - T(X, Y), Q(Y)\big)\Big)$.
   Montrer que si α est une racine de $P(X)$ et β une racine de $Q(X)$, alors $T(\alpha, \beta)$ est une racine de $R_4(Z)$.

Théorème de Bézout. On considère deux courbes planes projectives de degrés respectifs m et n définies sur un corps algébriquement clos et on suppose qu'elles n'ont pas de composante irréductible commune. Alors elles ont exactement mn points d'intersection comptés avec leur multiplicités.
Dans l'exercice qui suit, nous allons démontrer une version affine (et plus faible) de ce résultat en utilisant le résultant.

Exercice 3. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X,Y]$ deux polynômes premiers entre eux de degrés respectifs m et n. On note $V(P) = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \mid P(x,y) = 0\}$.
Le but de l'exercice est de montrer que $\mathrm{Card}(V(P) \cap V(Q)) \leq mn$.

1. Trouver un exemple pour montrer que l'inégalité stricte est possible.
2. Soit $R \in \mathbb{K}[X]$ le résultant de P et Q vus dans $\mathbf{k}[X][Y]$. Montrer que $\deg(R) \leq mn$.
3. En déduire que $\mathrm{Card}(V(P) \cap V(Q)) \leq m^2 n^2$.
4. Quitte à considérer $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} := \mathbb{K}(T)$, on peut supposer que $\mathbb{K}$ est de cardinal infini.
   Notons $\Gamma = V(P) \cap V(Q)$.
   Soient alors deux droites D et D' de $\mathbb{K}^2$ telles que la droite qui joint deux points quelconques de Γ ne soit parallèle ni à D ni à D'. (Ces deux droites existent car $\mathbb{K}$ est infini.)
   En utilisant un changement de coordonnées affine basé sur les droites D et D', montrer que $\mathrm{Card}(\Gamma) \leq mn$.

Exercice 4. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X,Y]$ deux polynômes de degré n. On suppose que $V(P)$ et $V(Q)$ sont infinis et que l'intersection $\Gamma = V(P) \cap V(Q)$ est de cardinal n^2.
Soit $S \in \mathbb{K}[X,Y]$ irréductible de degré $d < n$. On suppose que $V(S)$ est infini et qu'il contient exactement nd points de Γ.
Le but de l'exercice est de montrer que les $n(n-d)$ points restants de Γ sont sur une certaine courbe $V(L)$ avec $L \in \mathbb{K}[X,Y]$ de degré $n-d$.

1. Soit M un point de $V(S)$ non situé sur Γ. Justifier qu'un tel point existe.
2. Justifier qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $(\lambda P + \mu Q)(M) = 0$.
3. Quel est le cardinal de $V(S) \cap V(\lambda P + \mu Q)$?
4. En déduire, via Bézout, que S divise $\lambda P + \mu Q$.
5. Conclure.

L'exercice précédent a pour conséquence un résultat de Pascal que voici.

Exercice 5 (Pascal)**.** Soit C une conique non vide de $\mathbb{K}^2$ et soient p, q, r, p', q', r' des points de C distincts deux à deux. Les droites (qr') et $(q'r)$ (resp. (rp') et $(r'p)$, resp. (pq') et $(p'q)$) se coupent en u (resp. v, resp. w).
Montrer que u, v et w sont alignés.
Indication : on pourra considérer P de degré 3 qui définit la réunion des droites (qr'), (rp') et (pq'). De même Q qui définit la réunion des trois autres droites ci-dessus. Quel est le cardinal de $V(P) \cap V(Q)$?