

MASTER M1G

Groupes Classiques et Géométrie

EXAMEN

2 Juin 2016

Durée : 3h

**Exercice préliminaire.**

Soit  $q$  une forme quadratique sur un espace  $E$  de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $E$  se décompose en somme directe de deux sous-espaces  $q$ -orthogonaux  $E = F \oplus F'$ , et que la signature de  $q$  restreinte à  $F$ , resp.  $F'$ , est  $(r, s)$ , resp.  $(r', s')$ . Montrer que la signature de  $q$  est  $(r + r', s + s')$ .

**Problème 1.** *Signature de la forme trace*

1. Montrer que la forme  $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. En déduire que le groupe  $O_n(\mathbb{R})$  est borné pour toute norme sur l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Montrer que  $q : A \mapsto \text{tr}(A^2)$  définit une forme quadratique sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Donner explicitement sa forme polaire.
4. On étudie la restriction de  $q$  au sous-espace des matrices symétriques, puis au sous-espace des matrices antisymétriques. Montrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour la forme quadratique.
5. On pose ici  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Montrer, en utilisant l'exercice préliminaire, que la signature de cette forme quadratique est  $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$ .
6. En déduire que la forme bilinéaire  $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$  est non dégénérée.

**Problème 2.** *Application de la décomposition polaire*

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $U \in U(n)$  telles que  $A = UBU^*$ . On veut montrer que  $A$  et  $B$  sont  $O(n)$ -semblables.

1. Soit  $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $X + iY = U$ . Montrer, en considérant le polynôme  $P$  tel que  $P(t) = \det(X + tY)$ , qu'il existe  $\eta \in \mathbb{R}$  tel que  $X + \eta Y \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $Q := X + \eta Y$ .
2. Montrer que  $AX = XB$  et  $AY = YB$ . En déduire que  $A = QBQ^{-1}$ .
3. Montrer que  ${}^tA = U {}^tBU^{-1}$ , puis, en déduire  ${}^tA = Q {}^tBQ^{-1}$ .
4. Déduire de ce qui précède que  $B$  commute avec  ${}^tQQ$ .
5. Soit  $Q = VR$  la décomposition polaire de  $Q$ , avec  $V \in O(n)$  et  $R \in \mathcal{S}_n^{++}$ . Montrer que  $B$  commute avec  $R$ . En déduire que  $A$  et  $B$  sont  $O(n)$ -semblables.

**Problème 3.** Nombre de matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$

On désigne par  $\mathbb{F}_q$  le corps à  $q$  éléments. Soit  $n$  et  $k$  deux entiers positifs. On fixe  $k$  entiers  $n_1, n_2, \dots, n_k$  tels que  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ .

1. Soit  $\mathcal{E}_k$  l'ensemble des  $k$ -uplets  $(E_1, \dots, E_k)$  de sous-espaces de  $\mathbb{F}_q^n$ , tels que

$$E_1 \oplus \dots \oplus E_k = \mathbb{F}_q^n, \quad \dim E_i = n_i \quad (1 \leq i \leq k).$$

Montrer que  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  agit naturellement de façon transitive sur  $\mathcal{E}_k$ .

2. En déduire que le cardinal de  $\mathcal{E}_k$  est égal à

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)| / \prod_{i=1}^k |\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{F}_q)|.$$

3. En déduire que le nombre de matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$  est:

$$\sum_{n_1 + \dots + n_k = n, n_i \geq 0} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^k |\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}.$$

On construira une bijection en assignant à la matrice diagonalisable  $A$  la famille de sous-espaces  $(E_\zeta)_{\zeta \in \mathbb{F}_q}$ , où  $E_\zeta$  est le sous-espace propre de  $A$  pour la valeur propre  $\zeta \in \mathbb{F}_q$ .

**Problème 4.** Isomorphisme exceptionnel  $\mathrm{PSU}(1, 1) \simeq \mathrm{SO}_0(2, 1)$

Le but de l'exercice est de montrer l'isomorphisme exceptionnel entre  $\mathrm{PSU}(1, 1)$  et  $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ .

**A.** On note

$$\mathrm{U}(1, 1) := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), AJA^* = J\} \text{ et } \mathrm{SU}(1, 1) := \mathrm{U}(1, 1) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),$$

$$\text{où } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $\mathrm{U}(1, 1)$  est le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & \lambda \bar{b} \\ b & \lambda \bar{a} \end{pmatrix},$$

où  $\lambda$  est un complexe de module 1 et  $a$  et  $b$  deux complexes tels que  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ .

2. Montrer, en utilisant le théorème de submersion, que

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 1\}$$

est une sous-variété de  $\mathbb{R}^4$ . En déduire que  $\mathrm{SU}(1, 1)$  est une sous-variété de dimension 3.

3. On note

$$\mathfrak{u}(1, 1) := \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), MJ + JM^* = 0\}.$$

Montrer que  $\mathfrak{u}(1, 1)$  est un sous-espace réel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et que si  $A \in \mathrm{U}(1, 1)$ ,  $M \in \mathfrak{u}(1, 1)$ , alors  $AMA^{-1} \in \mathfrak{u}(1, 1)$ .

4. Soit  $\mathfrak{su}(1, 1)$  le sous-espace des matrices de  $\mathfrak{u}(1, 1)$  de trace nulle. Montrer que  $\mathfrak{su}(1, 1)$  est de dimension 3.

5. En faisant agir  $\mathrm{SU}(1, 1)$  par conjugaison  $\mathfrak{su}(1, 1)$ , construire un isomorphisme exceptionnel  $\mathrm{PSU}(1, 1) \simeq \mathrm{SO}_0(2, 1)$ , où  $\mathrm{PSU}(1, 1)$  est le quotient de  $\mathrm{SU}(1, 1)$  par le sous-groupe distingué des homothéties de  $\mathrm{SU}(1, 1)$ .

Donner les étapes de la démonstration en admettant que  $\mathrm{SU}(1, 1)$  est connexe.