

Fiche 2 – Topologie des espaces de matrices, groupes topologiques

Dans tout ce qui suit, on désigne par \mathbf{K} le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} et on munit $M_{p,q}(\mathbf{K})$ de sa topologie de \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 (Sur les matrices de rang r) — Soit p, q deux entiers naturels non nuls. On considère une matrice $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$ que l'on suppose de rang $r < \min\{p, q\}$ et on fixe un entier ρ tel que $r + 1 \leq \rho \leq \min\{p, q\}$.

Démontrer qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de matrices dans $M_{p,q}(\mathbf{K})$ qui converge vers A et telle que $\text{rg}(A_n) = \rho$ pour tout n . (*Indication : commencer par examiner le cas où A est sous forme normale.*)

Exercice 2 (Topologie de l'espace des symétries) — Soit \mathcal{S} le sous-ensemble de $M_n(\mathbf{K})$ formé des matrices S telles que $S^2 = I_n$ (symétries). On considère les fonctions ρ_+ et ρ_- définies par

$$\rho_{\pm} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{N}, \quad S \mapsto \text{rg}(S \pm I_n).$$

1. Quel lien existe-t-il entre ρ_+ et ρ_- sur \mathcal{S} ?
2. Démontrer que les fibres de ρ_+ et ρ_- sont des parties ouvertes et fermées de \mathcal{S} .
3. En considérant l'action naturelle de $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ sur \mathcal{S} par conjugaison, démontrer que les fibres de ρ_+ et ρ_- sont des parties connexes de \mathcal{S} .

Exercice 3 (Densité du complémentaire d'une hypersurface) — Soit $P \in \mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme en n variables. Le but de l'exercice est de démontrer que, si P n'est pas le polynôme nul, alors l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n \mid P(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}$ est un ouvert dense de \mathbf{K}^n .

1. Supposons que P s'annule sur une partie de \mathbf{K}^n de la forme $S_1 \times \dots \times S_n$, où S_i désigne une partie infinie de \mathbf{K} . Démontrer que P est le polynôme nul. (*Indications : on raisonnera par récurrence sur le nombre n d'indéterminées, en écrivant P sous la forme $P = \sum_k a_k(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^k$.)*)
2. En déduire que si P s'annule identiquement sur un ouvert non vide de \mathbf{K}^n , alors P est le polynôme nul.
3. Conclure.

Exercice 4 (Densité des endomorphismes diagonalisables) — Soit $D_n(\mathbf{K}) \subset M_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables et $\Sigma_n(\mathbf{K}) \subset M_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes.

1. Comparer $D_n(\mathbf{K})$ et $\Sigma_n(\mathbf{K})$.
2. Démontrer que les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ sont des polynômes en les coefficients de A . Expliciter les cas $n = 2$ et $n = 3$.
3. Démontrer que l'application $\chi : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^n$, associant à une matrice M les coefficients $a_0(M), \dots, a_{n-1}(M)$ de son polynôme caractéristique

$$\det(M - XI_n) = (-1)^n (X^n + a_{n-1}(M)X^{n-1} + \dots + a_0(M)),$$

est continue.

4. Démontrer que l'ensemble des n -uplets $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ tels que toutes les racines du polynôme $T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_0$ soient simples est une partie ouverte et dense. (*Indication : reformuler la question à l'aide de la notion de discriminant, rappelée ci-dessous, puis utiliser l'exercice précédent.*)

5. En déduire que $D_n(\mathbf{C})$ et $\Sigma_n(\mathbf{C})$ sont denses dans $M_n(\mathbf{C})$.
6. Démontrer que $D_n(\mathbf{C})$ n'est pas ouvert si $n > 1$, puis que $\Sigma_n(\mathbf{C})$ est l'intérieur de $D_n(\mathbf{C})$. (*Indication : pour la seconde partie de la question, on pourra démontrer que toute matrice dans $D_n(\mathbf{C}) - \Sigma_n(\mathbf{C})$ est la limite d'une suite de matrices non diagonalisables en utilisant la réduction de Dunford-Jordan.*)
7. Démontrer que $D_2(\mathbf{R})$ n'est pas dense dans $M_2(\mathbf{R})$.

Rappel : résultant et discriminant – Soit \mathbf{K} un corps commutatif. Pour tout entier $d \geq 0$, on désigne par $\mathbf{K}[T]_{\leq d}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d .

Soit $P, Q \in \mathbf{K}[T]$ deux polynômes de degrés respectifs $p, q \geq 1$. Considérons l'application linéaire

$$\Phi : \mathbf{K}[T]_{\leq q-1} \oplus \mathbf{K}[T]_{\leq p-1} \rightarrow \mathbf{K}[T]_{\leq p+q-1}, \quad (U, V) \mapsto PU + QV.$$

- (i) Démontrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si Φ est un isomorphisme. (*Indication : considérer l'injectivité (resp. la surjectivité) de Φ pour voir que la condition est nécessaire (resp. suffisante)*)
- (ii) Écrivons $P = a_p T^p + a_{p-1} T^{p-1} + \dots + a_0$ et $Q = b_q T^q + b_{q-1} T^{q-1} + \dots + b_0$. Expliciter la matrice de Φ par rapport aux bases $(1, T, \dots, T^{q-1}; 1, T, \dots, T^{p-1})$ et $(1, T, \dots, T^{p+q-1})$. En déduire qu'il existe un polynôme $R \in \mathbf{K}[X_0, X_1, \dots, X_p, Y_0, Y_1, \dots, Y_q]$ tel que

$$\det \Phi = R(a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q).$$

Par définition, $\det \Phi$ est le *résultant* des polynômes P et Q ; on le note $\text{Res}(P, Q)$. Par construction, c'est un élément de \mathbf{K} qui s'annule si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux. Pour un polynôme P de degré p , on pose $\text{disc}(P) = (-1)^{p(p-1)/2} \text{Res}(P, P')$; c'est le *discriminant* de P . On observe que $\text{disc}(P)$ est un polynôme en les coefficients de P .

- (iii) Calculer $\text{disc}(P)$ pour $P = aT^2 + bT + c$, puis pour $P = T^3 + aT + b$.

Exercice 5 (Propriétés élémentaires des groupes topologiques) — Soit G un groupe topologique.

1. Soit $g_0 \in G$. Montrer que les applications $L_{g_0} : G \rightarrow G, g \mapsto g_0 g$ et $R_{g_0} : G \rightarrow G, g \mapsto g g_0$ sont des homéomorphismes.
2. Démontrer que si $U \subset G$ est un ouvert et $V \subset G$ est une partie quelconque, alors $U^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in U\}$ et $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ sont ouverts.
3. Démontrer que si U et V sont compacts alors UV est compact.

En revanche, le produit de deux fermés n'est pas nécessairement fermé... Pouvez-vous donner un exemple de groupe et de parties fermées U et V telles que UV ne soit pas fermé ?

Exercice 6 (Voisinages) — Soit G un groupe topologique.

1. Démontrer que, lorsque V parcourt un système fondamental de voisinage de 1, les ensembles Vg_0 , (resp. g_0V) forment un système fondamental de voisinages de g_0 .
2. Démontrer que l'application $f : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto g g_0 h^{-1}$ est continue. En déduire, lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de 1, les ensembles Vg_0V^{-1} forment un système fondamental de voisinages du point g_0 de G .

Exercice 7 (Un extrait d'examen) — Soit G un groupe topologique connexe et soit H un sous-groupe distingué et discret de G . Démontrer que H est abélien. (*Indication : considérer l'action de G sur H par conjugaison et étudier la topologie des orbites.*)