

### Fiche 3 – Groupes topologiques

**Exercice 1** (Une observation importante) — Soit  $G$  un groupe topologique et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Démontrer que, si  $H$  est ouvert, alors  $H$  est également fermé. Que peut-on en déduire sur  $H$  si  $G$  est connexe ?

**Exercice 2** (Adhérence) — Soit  $G$  un groupe topologique. On désigne par  $\bar{A}$  l'adhérence de la partie  $A$  de  $G$ .

- (a) Soit  $U$  un voisinage de 1 et soit  $g, h$  dans  $G$ . Montrer qu'il existe un ouvert  $V \subset U$  tel que  $gVhV \subset ghU$ .
  - (b) En déduire que si  $g$  et  $h$  sont dans les adhérences  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  de parties  $A$  et  $B$  de  $G$ , alors  $ghU \cap \bar{A}\bar{B} \neq \emptyset$ .
  - (c) Démontrer que  $\bar{A} \cdot \bar{B} \subset \overline{AB}$ .
- Prouver l'égalité  $\bar{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$ .
  - Montrer que pour tout  $g, h$  dans  $G$ ,  $g\bar{A}h = \overline{gAh}$ .
  - On suppose que  $ab = ba$  pour tout couple  $(a, b)$  de  $A \times B$ . En considérant l'application  $f : G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$ , prouver que  $ab = ba$  pour tout couple  $(a, b)$  de  $\bar{A} \times \bar{B}$ .
  - Démontrer que l'adhérence d'un sous groupe  $H$  de  $G$  est un sous groupe de  $G$ , puis que  $\bar{H}$  est abélien si et seulement si  $H$  l'est.

**Exercice 2** (Composante neutre) — Soit  $G$  un groupe topologique. On désigne par  $G^\circ$  la composante connexe de 1.

- Démontrer que  $G^\circ$  est fermée (*indication : vérifier que l'adhérence de  $G^\circ$  est connexe...*).
- Démontrer que  $G^\circ$  est stable par conjugaison.
- Pour tout  $g \in G$ , démontrer que  $gG^\circ$  est la composante connexe de  $g$ .
- Démontrer que si  $H$  est un sous-groupe ouvert inclus dans  $G^\circ$ , alors  $H = G^\circ$ .
- Démontrer que si  $G$  est connexe, alors tout voisinage  $V$  de 1 engendre  $G$ , i.e.

$$G = \bigcup_{n \geq 1} V^n.$$

(*Indication* : observer que l'on peut restreindre  $V$  de sorte que  $V^{-1} = V$ ).

- Démontrer que  $G^\circ$  est ouvert si et seulement si 1 a un voisinage connexe dans  $G$ .
- On considère le sous-groupe  $\mathbf{Q}$  de  $\mathbf{R}$  muni de la topologie métrique induite.
  - Démontrer que  $\mathbf{Q}$  n'est pas discret.
  - Démontrer que la composante neutre de  $\mathbf{Q}$  est  $\{0\}$  (cet exemple montre que  $G^\circ$  n'est en général pas ouverte).

**Exercice 3** (Sous-groupes additifs de  $\mathbf{R}$ ) —

- Soit  $H$  un sous-groupe non trivial de  $\mathbf{R}$ .
  - Justifier l'existence de la borne inférieure  $a$  de  $H \cap \mathbf{R}_{>0}$ .
  - Démontrer que si  $a$  est non nul, alors  $H = a\mathbf{Z}$ .
  - Démontrer que si  $a$  est nul, alors  $H$  est dense dans  $\mathbf{R}$ .
  - En déduire que tout sous-groupe de  $\mathbf{R}$  est soit cyclique, soit dense.

2. Soit  $\alpha$  un nombre réel et soit  $H = \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ .
  - (a) Supposons que  $\alpha$  soit rationnel et écrivons  $\alpha = \frac{p}{q}$  avec  $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$  et  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ .  
Démontrer que  $H$  est le groupe  $\frac{1}{q}\mathbf{Z}$ .
  - (b) Démontrer que, si  $\alpha$  est irrationnel, alors  $H$  est dense dans  $\mathbf{R}$ .
  - (c) En déduire que tout élément de  $[-1, 1]$  est valeur d'adhérence de la suite  $(\cos n)_{n \in \mathbf{N}}$  (*indication* : on pourra utiliser, en le justifiant, le fait que l'image d'une partie dense par une application continue *surjective* est encore dense).
3. Soit  $G$  le groupe quotient  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ , muni de la topologie quotient ; on note  $\pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow G$  la projection canonique. Fixons un nombre irrationnel  $\vartheta$ . On note  $H_0$  le sous-groupe de  $\mathbf{R}^2$  formé des couples  $(x, y)$  tels que  $y = \vartheta x$ ,  $H$  son image par la projection  $\pi$  et  $\tilde{H}$  la saturation de  $H_0$ , c'est-à-dire :

$$\tilde{H} = \pi^{-1}(\pi(H_0)).$$

- (a) Démontrer que  $\tilde{H}$  est dense dans  $\mathbf{R}^2$  et en déduire que  $H$  est dense dans  $G$ .
- (b) Le groupe quotient  $G/H$  est-il séparé ?

**Exercice 4** (Groupes classiques compacts) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ . Démontrer que les groupes topologiques  $U(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SU(n)$  et  $SO(n)$  sont compacts.

**Exercice 5** (Exponentielle) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$  et  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . On considère l'application exponentielle

$$\exp : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow M_n(\mathbf{K}), \quad A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

1. Justifier soigneusement le bien-fondé de cette définition.
2. Démontrer que si  $A, B \in M_n(\mathbf{K})$  sont deux matrices qui commutent, alors  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ .
3. En utilisant la série entière du logarithme  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{A^n}{n}$ , démontrer que l'image de  $\exp$  contient un voisinage de  $I_n$ .
4. Si  $n = 1$ , en déduire que  $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times$  est un sous-groupe ouvert de  $\mathbf{C}^\times$ , puis que  $\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times$ .  
Peut-on faire le même raisonnement lorsque  $n \geq 2$  ?

Pour tout  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ , on va prouver la surjectivité de l'application  $\exp : M_n(\mathbf{C}) \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$  en adaptant le raisonnement de la question 4. Plus précisément, on se propose de démontrer le théorème suivant :

*pour toute matrice  $A \in GL_n(\mathbf{C})$ , il existe une matrice  $B \in \mathbf{C}[A]$  telle que  $A = \exp(B)$ .*

6. Soit  $A \in M_n(\mathbf{C})$ . Démontrer que  $\mathbf{C}[A]$  est une partie fermée de  $M_n(\mathbf{C})$  et en déduire  $\exp(A) \in \mathbf{C}[A]$ .
7. Démontrer de même que, si  $A$  est suffisamment proche de l'identité, alors  $\log(A)$  est bien défini et appartient à  $\mathbf{C}[A]$ .

Fixons maintenant  $A \in GL_n(\mathbf{C})$ . On munit  $\mathbf{C}[A]$  et  $\mathbf{C}[A]^\times$  des topologies induites par celle de  $M_n(\mathbf{C})$ .

8. Démontrer que  $\mathbf{C}[A]$  et  $\mathbf{C}[A]^\times$  sont des groupes topologiques connexes.
9. Démontrer que l'exponentielle induit un homomorphisme de groupes  $\mathbf{C}[A] \rightarrow \mathbf{C}[A]^\times$  dont l'image contient un voisinage de 1, puis conclure.

Sur les réels, la situation est moins favorable.

10. Pour  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , démontrer que  $\text{Sp}(\exp(A)) = \exp(\text{Sp}(A))$  (*indication* : trigonaliser  $A$  sur  $\mathbf{C}$ ).  
En déduire que la matrice  $\text{diag}(-1, -2) \in GL_2(\mathbf{R})_+$  n'est pas une exponentielle réelle.
11. En utilisant l'exercice 2 ci-dessus, démontrer cependant que toute matrice  $A \in GL_n(\mathbf{R})_+$  est un produit d'exponentielles réelles.