

## Fiche 4 – Espaces homogènes

**Exercice 1** — Soit  $G$  un groupe topologique agissant sur un ensemble  $X$ . Soit  $x$  et  $y$  deux points de  $X$  appartenant à la même orbite sous  $G$ . Démontrer que les espaces  $G/G_x$  et  $G/G_y$ , munis de la topologie quotient, sont homéomorphes.

**Exercice 2** (Matrices de rang  $r$ ) — Soit  $m, n$  deux entiers naturels non nuls. On considère l'action de  $GL_m(\mathbf{K}) \times GL_n(\mathbf{K})$  sur  $M_{m,n}(\mathbf{K})$  définie par  $(P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$ .

1. Étant donné  $r \in \{0, \dots, \min\{m, n\}\}$ , déterminer le stabilisateur  $G_r$  de la matrice  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
2. Expliciter la structure de groupe sur  $G_r$ . En déduire que  $G_r$  est isomorphe à un produit semi-direct topologique  $N \rtimes_{\varphi} H$ , où  $N = M_{r, m-r}(\mathbf{K}) \oplus M_{n-r, r}(\mathbf{K})$  (vu comme un groupe pour l'addition),  $H = GL_r(\mathbf{K}) \times GL_{m-r}(\mathbf{K}) \times GL_{n-r}(\mathbf{K})$  et  $\varphi$  est une action de  $H$  sur  $N$  que l'on précisera.

**Exercice 3** (Groupes linéaires/orthogonaux et produit semi-direct) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ .

1. Démontrer que  $GL_n(\mathbf{R})$  est isomorphe à un produit semi-direct topologique de  $SL_n(\mathbf{R})$  par  $\mathbf{R}^{\times}$ . Idem sur  $\mathbf{C}$ .
2. Démontrer que le groupe orthogonal  $O_n(\mathbf{R})$  est isomorphe à un produit semi-direct topologique de  $SO_n(\mathbf{R})$  par  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Pour quelles valeurs de  $n$  ce produit est-il direct (c'est-à-dire isomorphe au produit direct des deux groupes) ?

**Exercice 4** (Connexité des groupes orthogonaux et unitaires) — Soit  $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ . On considère l'action naturelle des groupes  $O_n(\mathbf{R})$  et  $SO_n(\mathbf{R})$  sur  $\mathbf{R}^n$ .

1. Déterminer le stabilisateur et l'orbite du premier vecteur de la base canonique.
2. Supposons  $n \geq 2$ . Démontrer que la sphère unité

$$\mathbf{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

est connexe. (*Indication* : on pourra raisonner sur des hémisphères ou bien utiliser une projection stéréographique).

3. Déduire de ce qui précède que  $\mathbf{S}^{n-1}$  est homéomorphe à l'espace homogène  $SO_n(\mathbf{R})/SO_{n-1}(\mathbf{R})$ , puis que le groupe  $SO_n(\mathbf{R})$  est connexe pour tout  $n \geq 1$ . (*Indication* : raisonner par récurrence sur  $n$  en utilisant l'exercice 3).
4. Déterminer les composantes connexes de  $O_n(\mathbf{R})$ .
5. Adapter ce raisonnement pour démontrer que les groupes  $U_n(\mathbf{C})$  et  $SU_n(\mathbf{C})$  sont connexes.

**Exercice 5** (Grassmanniennes) — Dans cet exercice,  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et soit  $d \in \{1, \dots, n\}$ . On désigne par  $\mathbf{Gr}_d(E)$  l'ensemble des sous-espaces de  $\mathbf{K}$  de dimension  $d$  (appelé *grassmannienne*).

1. Vérifier que le groupe  $GL(E)$  opère sur  $\mathbf{Gr}_d(E)$  via :

$$\forall g \in GL(E), \forall F \in \mathbf{Gr}_d(E), \quad g \cdot F = g(F).$$

2. Démontrer que cette action est transitive.
3. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Décrire matriciellement le stabilisateur du sous-espace  $F_0 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_d)$  et le dévisser en un produit semi-direct de groupes classiques.

4. Expliquer comment on définit la topologie sur  $\mathbf{Gr}_d(\mathbb{E})$  de telle sorte que l'action précédente soit continue.
5. En munissant  $\mathbb{E}$  d'un produit scalaire euclidien (si  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ) ou hermitien (si  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ), démontrer qu'il existe un sous-groupe *compact* de  $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$  agissant *transitivement* sur  $\mathbf{Gr}_d(\mathbb{E})$ . En déduire que, munie de la topologie définie ci-dessus, la grassmannienne est compacte.
6. Soit  $F \subset \mathbb{E}$  un sous-espace vectoriel de dimension  $d$ . Soit  $(F_n)_n$  une suite de sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{E}$  de dimension  $d$ . Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
  - (i) la suite  $(F_n)$  converge vers  $F$  dans l'espace topologique  $\mathbf{Gr}_d(\mathbb{E})$ ;
  - (ii) il existe une base  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $F$  et, pour tout  $n$ , une base  $(e_1^{(n)}, \dots, e_d^{(n)})$  de  $F_n$  telles que la suite  $(e_i^{(n)})$  converge vers  $e_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

**Exercice 6** (Le demi-plan de Poincaré) — Soit

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C} ; \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

le demi-plan de Poincaré.

1. Vérifier que l'application

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}, \quad \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

est bien définie.

2. Démontrer que  $\varphi$  est une action continue de  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$  sur  $\mathfrak{H}$ . Calculer le stabilisateur de  $i$ .
3. Démontrer que  $\mathfrak{H}$  est homéomorphe à  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}(2)$ .

**Exercice 7** (Continuité des racines d'un polynôme) — Le but de cet exercice est de voir que l'ensemble des racines complexes avec multiplicité d'un polynôme dépend continûment des coefficients de ce polynôme.

Pour tout  $n$ -uplet  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$  et tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $e_k(z)$  la  $k$ -ième fonction *symétrique élémentaire* de  $z$ , définie par l'identité suivante dans  $\mathbf{C}[X]$  :

$$\prod_{i=1}^n (X - z_i) = X^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k e_k(z) X^{n-k}.$$

1. Exprimer  $e_k(z)$  en fonction des coordonnées de  $z$  (*indication : développer le membre de gauche...*).
2. Démontrer que l'application  $e : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ ,  $z \mapsto (e_1(z), \dots, e_n(z))$  est continue et surjective.
3. Démontrer que les fibres de  $e$  sont précisément les orbites de l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\mathbf{C}^n$  définie par

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n, \quad \sigma \cdot z = (z_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)}).$$

4. Pour tout  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ , démontrer les inégalités

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |z_i| \leq \max\{1, |e_1(z)|, \dots, |e_n(z)|\}.$$

5. Démontrer que l'image d'un fermé  $F$  par  $e$  est un fermé (*indication : considérer une suite  $(w_m)$  dans  $e(F)$  convergeant vers  $w \in \mathbf{C}^n$  et justifier que  $e^{-1}(w_m)$  possède une valeur d'adhérence*).
6. En déduire que  $e$  réalise un homéomorphisme entre  $\mathbf{C}^n/\mathfrak{S}_n$  et  $\mathbf{C}^n$ .
7. Expliquer pourquoi le résultat précédent peut se reformuler comme suit : *si  $(P_k)$  est une suite de polynômes unitaires de degré  $n$  fixé qui converge vers un polynôme  $P$  (au sens de la convergence simple des coefficients), alors les racines de  $P_k$  convergent vers celles de  $P$ , au sens où l'on peut écrire*

$$\begin{cases} P_k = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^{(k)}) \\ P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \end{cases} \quad \text{avec } \forall i, \lambda_i^{(k)} \rightarrow \lambda_i.$$