

Fiche 5 — Réduction des endomorphismes

Exercice 1 (Similitude : de \mathbf{C} à \mathbf{R}) — Soit $A, B \in M_n(\mathbf{R})$. On se propose de démontrer que A et B sont semblables sur \mathbf{C} si et seulement si elles le sont sur \mathbf{R} . La condition est évidemment suffisante.

Supposons que A et B soient semblables sur \mathbf{C} : il existe donc une matrice $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

1. Écrivons $P = U + iV$ avec $U, V \in M_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que la matrice réelle $Q_t = U + tV$ soit inversible. (*Indication : considérer le polynôme $\det(U + zV)$*)
2. Si t est comme précédemment, vérifier que l'on a alors $B = Q_t A Q_t^{-1}$.

Exercice 2 (Classes de similitude) — 1. Démontrer que deux matrices $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ sont semblables si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \text{rg}(A - \lambda I_n)^k = \text{rg}(B - \lambda)^k.$$

(*Indication : utiliser le lemme des noyaux et la réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents.*)

2. Fixons maintenant un polynôme $\chi \in \mathbf{C}[T]$ unitaire et de degré n . On désigne par M_n^χ l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbf{C})$ de polynôme caractéristique $(-1)^n \chi$.

- (i) Décrire les orbites pour l'action de $GL_n(\mathbf{C})$ sur M_n^χ . Combien y en a-t-il ?
- (ii) Démontrer que l'adhérence de \mathcal{O}_A contient toujours une matrice diagonale. (*Indication : utiliser la réduction de Jordan.*)
- (iii) Supposons que A soit diagonalisable. Démontrer qu'une matrice B appartient à l'adhérence de \mathcal{O}_A si et seulement si A et B ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal.
- (iv) Dédire des deux questions précédentes que A est diagonalisable si et seulement si l'orbite \mathcal{O}_A est fermée.

Exercice 3 (Matrices nilpotentes) — 1. Démontrer que toutes les matrices $A \in M_8(\mathbf{K})$ telles que $\text{Ker}(A) = \text{Im}(A)$ sont semblables. (*Indications : observer que ces matrices sont nilpotentes...*)

2. Soit $N \in M_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente.
 - (i) Décrire la forme normale de Jordan de N^2 à partir de celle de N .
 - (ii) En déduire une caractérisation des classes de conjugaison de matrices nilpotentes admettant une « racine carrée ».
3. Considérons les matrices diagonales par blocs suivantes dans $M_6(\mathbf{R})$:

$$N = \text{diag}(J_4, J_2), \quad N' = \text{diag}(J_4, J_1, J_1) \quad \text{et} \quad N'' = \text{diag}(J_3, J_3),$$

où J_p désigne la matrice de Jordan de taille $(p+1) \times (p+1)$ standard.

Construire des applications continues γ' et γ'' de $[0, 1]$ dans $M_6(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall t \in]0, 1], \quad \gamma'(t) \sim \gamma''(t) \sim N, \quad \gamma'(0) \sim N' \quad \text{et} \quad \gamma''(0) \sim N'',$$

où \sim désigne la relation de similitude.

Exercice 4 (Un extrait d'examen) — Le corps \mathbf{K} est \mathbf{R} ou \mathbf{C} . On considère l'action par conjugaison de $GL_n(\mathbf{K})$ sur $M_n(\mathbf{K})$:

$$GL_n(\mathbf{K}) \times M_n(\mathbf{K}) \rightarrow M_n(\mathbf{K}), \quad (P, A) \mapsto PAP^{-1}.$$

On désigne par \mathcal{O}_A l'orbite d'une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ et par Z_A son stabilisateur.

Première partie

1. Démontrer que \mathcal{O}_A est connexe lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Supposons maintenant $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et désignons par $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices de déterminant positif.

2. Démontrer que, si Z_A contient une matrice de déterminant négatif, alors \mathcal{O}_A est connexe.
3. En déduire que \mathcal{O}_A est toujours connexe lorsque n est impair.
4. Démontrer que, si Z_A est contenu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$, alors \mathcal{O}_A n'est pas connexe.
(*Indication* : on pourra construire une application continue et surjective de \mathcal{O}_A sur $\{\pm 1\}$.)
5. Déduire de ce qui précède que \mathcal{O}_A :
 - est connexe si $Z_A \not\subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$;
 - a exactement deux composantes connexes si $Z_A \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})_+$.

Seconde partie

On suppose maintenant $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de polynôme caractéristique χ_M . Démontrer que $\det(M) < 0$ si et seulement si χ_M possède une racine réelle strictement négative de multiplicité impaire.
2. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) Z_A contient une matrice de déterminant négatif;
 - (ii) il existe une décomposition $\mathbf{R}^n = F' \oplus F''$ telle que F' , F'' soient deux sous-espaces vectoriels A -stables et F' soit de dimension impaire.
3. Supposons que A soit nilpotente, de diagramme de Young Y .
 - (i) Supposons qu'il existe une décomposition $\mathbf{R}^n = F' \oplus F''$ telle que F' et F'' soient deux sous-espaces vectoriels A -stables. Comment obtenir Y à partir des tableaux de Young Y' et Y'' des restrictions de A à F' et à F'' ?
 - (ii) Démontrer que \mathcal{O}_A est connexe si et seulement si l'une des colonnes de Y est de longueur impaire.