Université Lyon 1 – 2015-2016
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 6 — Formes quadratiques

Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathbf{K}$ un corps commutatif de caractéristique différente de 2. Un *espace quadratique* sur $\mathbf{K}$ est un couple (E, φ), où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et φ est une forme quadratique sur E ; un tel espace est dit *régulier* si φ est de rang maximal.

Exercice 1 (Classification des formes quadratiques sur un corps fini) — Le corps $\mathbf{K}$ est supposé fini. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme quadratique φ.

1. Soit $a, b \in \mathbf{K} - \{0\}$. Démontrer que, pour tout $c \in \mathbf{K}$, il existe $x, y \in \mathbf{K}$ tels que $ax^2 + by^2 = c$ (*indication : dénombrer les valeurs possibles pour* ax^2 *et* $c - by^2$).
2. En déduire que, si φ est de rang au moins 2, alors l'application $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbf{K}$ est surjective.
3. Démontrer l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de φ est $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \delta, 0, \ldots, 0)$, où $\delta\mathbf{K}^{\times,2}$ est le discriminant[1] de φ (*indication : construire inductivement une base orthogonale de* E *en utilisant la question précédente*). En déduire que deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang et le même discriminant.
4. Les formes quadratiques
$$\varphi : (x, y, z) \mapsto 2x^2 + 3y^2 - z^2 \quad \text{et} \quad \psi : (x, y, z) \mapsto x^2 + 2xy + 3y^2 + 2yz + 5z^2$$
sont-elles équivalentes sur $\mathbf{F}_3$? sur $\mathbf{F}_5$? sur $\mathbf{F}_7$? sur $\mathbf{F}_{11}$?
5. Soit (E, φ) et (F, ψ) deux espaces quadratiques réguliers sur $\mathbf{K}$ tels que $\dim \mathrm{E} < \dim \mathrm{F}$. Démontrer qu'il existe une isométrie de (E, φ) dans (F, ψ), c'est-à-dire une application linéaire $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que $\psi \circ u = \phi$.

Exercice 2 (Le théorème de simplification de Witt) — Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{S}_m(\mathbf{K})$ et $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathrm{S}_n(\mathbf{K})$ trois matrices symétriques. Le *théorème de simplification* de Witt affirme que les matrices $\mathrm{diag}(\mathrm{A}, \mathrm{A}_1)$ et $\mathrm{diag}(\mathrm{A}, \mathrm{A}_2)$ sont congruentes si et seulement si les matrices A_1 et A_2 le sont (il est clair que la condition est suffisante).

Démontrer ce théorème lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}$ ou un corps fini.

Exercice 3 (Topologie de l'espace des formes quadratiques réelles) — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On désigne par $\mathcal{Q}(\mathrm{E})$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E et par $\mathcal{Q}^*(\mathrm{E})$ le sous-ensemble des formes *non dégénérées*. On désigne en outre par sgn l'application $\mathcal{Q}(\mathrm{E}) \to \mathbf{N}^2$ associant à une forme quadratique sa signature.

1. En utilisant l'action naturelle de $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ sur $\mathcal{Q}(\mathrm{E})$, démontrer que les fibres de sgn sont connexes par arcs.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{Q}^*(\mathrm{E})$. On considère la matrice A de φ dans une base de E et on suppose que tous les mineurs principaux $\Delta_i(\mathrm{A})$ sont non nuls.
   (i) Démontrer qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ triangulaire supérieure et à diagonale unité telle que
$${}^t\mathrm{PAP} = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n).$$

1. Le *discriminant* $\mathrm{disc}(\varphi)$ d'une forme quadratique φ est un élément du groupe quotient $\mathbf{K}^\times/\mathbf{K}^{\times,2}$. Si φ est *non dégénérée*, c'est la classe de $\det(\mathrm{A})$, où A est la matrice de φ dans une base quelconque de E ; en général, φ induit une forme quadratique non dégénérée $\overline{\varphi}$ sur $\mathrm{E}/\mathrm{Ker}(\varphi)$ et on pose $\mathrm{disc}(\varphi) = \mathrm{disc}(\overline{\varphi})$.

(*Indication : raisonner par récurrence sur n et interpréter matriciellement l'algorithme de diagonalisation (réduction) de Gauss.*)

(ii) En déduire que A est congruente à la matrice

$$\mathrm{diag}(\Delta_1(\mathrm{A}), \Delta_2(\mathrm{A})/\Delta_1(\mathrm{A}), \ldots, \Delta_n(\mathrm{A})/\Delta_{n-1}(\mathrm{A})).$$

(*Indication : interpréter les multiplications par* P *et* P^{-1} *en termes d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de* A.)

3. Démontrer que l'application sgn : $\mathcal{Q}^*(\mathrm{E}) \to \mathbf{N}^2$ est continue si l'on munit $\mathbf{N}^2$ de la topologie discrète (*indication : pour démontrer la continuité en un point φ, fixer une base de* E *dans laquelle la matrice de φ soit* $\mathrm{diag}(\mathrm{I}_r, -\mathrm{I}_s)$ *et utiliser la question précédente*).

   Est-ce encore vrai en remplaçant $\mathcal{Q}^*(\mathrm{E})$ par $\mathcal{Q}(\mathrm{E})$?

4. Soit $(r, s) \in \mathbf{N}^2$ avec $r + s = \dim \mathrm{E}$.

   (i) Démontrer que $\mathrm{sgn}^{-1}(r, s)$ est un ouvert de Q(E).

   (ii) Démontrer que l'adhérence de $\mathrm{sgn}^{-1}(r, s)$ dans $\mathrm{Q(E)}^*$ est l'ensemble des formes quadratiques de signature (p, q) avec $p \leqslant r$ et $q \leqslant s$.

   (*Indication : on pourra raisonner en termes de sous-espaces totalement positifs ou totalement négatifs.*)