Université Lyon 1 – 2015-2016
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 8 — Comptage sur les corps finis

Exercice 1 (Isomorphismes exceptionnels) — Étant donné un espace vectoriel V, on appelle *espace projectif* associé à V et on note $\mathbf{P}(\mathrm{V})$ l'ensemble des droites vectorielles de V (autrement dit, $\mathbf{P}(\mathrm{V})$ est la grassmanienne $\mathbf{Gr}_1(\mathrm{V})$). L'action naturelle du groupe $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ sur V induit de façon évidente une action de $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ sur $\mathbf{P}(\mathrm{V})$. Il est recommandé d'avoir cette construction en tête pour répondre aux questions suivantes...

1. Construire des isomorphismes
$$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $\mathrm{G} \leqslant \mathfrak{S}_n$ un sous-groupe d'indice n. On se propose de démontrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.
   (i) Étudier directement le cas $n \leqslant 4$.
   (ii) Supposons $n \geqslant 5$ et soit $\mathrm{X} = \mathfrak{S}_n/\mathrm{G}$. Démontrer que l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur X par translations fournit un isomorphisme $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{S}(\mathrm{X})$ identifiant G au stabilisateur d'un point de X. Conclure.

3. Construire des isomorphismes
$$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5 \quad \text{et} \quad \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5.$$

Exercice 2 (Cône nilpotent sur un corps fini) — Soit $\mathbf{K}$ un corps fini à q éléments et soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes dans $\mathrm{M}_3(\mathbf{K})$. On se propose de calculer le cardinal de $\mathcal{N}$ en exploitant l'action de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{K})$ par conjugaison sur $\mathcal{N}$.

1. Décrire les orbites de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{K})$ dans $\mathcal{N}$.

2. Pour chacune de ces orbites, expliciter le stabilisateur d'un élément bien choisi. En déduire le cardinal de chaque orbite.

3. En déduire le cardinal de $\mathcal{N}$.

Exercice 3 (Décompte des symétries ; extrait d'examen) — Soit $\mathbf{K}$ un corps fini de cardinal q et soit V un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathbf{Gr}(\mathrm{V})$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V, muni de l'action naturelle de $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$:
$$\mathrm{GL}(\mathrm{V}) \times \mathbf{Gr}(\mathrm{V}) \to \mathbf{Gr}(\mathrm{V}), \quad (g, \mathrm{W}) \mapsto g(\mathrm{W}).$$

Le but de cet exercice est de déterminer le cardinal de l'ensemble
$$\mathrm{X} = \{u \in \mathrm{End}(\mathrm{V}) \mid u^2 = \mathrm{id}\}.$$
On va distinguer deux cas : $\mathrm{car}(\mathbf{K}) \neq 2$ et $\mathrm{car}(\mathbf{K}) = 2$.

1. Expliciter le cardinal $\gamma_n(q)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ en fonction de n et de q.

2. Supposons tout d'abord que $\mathbf{K}$ soit de caractéristique différente de 2.
   (i) Démontrer que l'application
$$\mathrm{X} \to \mathbf{Gr}(\mathrm{V})^2, \quad u \mapsto (\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}), \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}))$$
   établit une bijection entre X et le sous-ensemble Y de $\mathbf{Gr}(\mathrm{V})^2$ formés des couples de sous-espaces supplémentaires.

(ii) Décrire les orbites de GL(V) agissant diagonalement sur Y.

(iii) Démontrer l'identité
$$|\mathrm{X}| = \sum_{d=0}^{n} \frac{\gamma_n(q)}{\gamma_d(q)\gamma_{n-d}(q)}.$$

3. Supposons maintenant que $\mathbf{K}$ soit de caractéristique 2. On considère l'action naturelle de GL(V) sur X par conjugaison.

   (i) Vérifier que l'application
   $$\pi : \mathrm{X} \to \mathbf{Gr}(\mathrm{V}), \quad u \mapsto \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$$
   est GL(V)-équivariante.

   (ii) Soit $\mathrm{W} \in \mathbf{Gr}(\mathrm{V})$ de dimension d. Démontrer que $\pi^{-1}(\mathrm{W})$ est non vide si et seulement si $2d \geqslant n$, puis exprimer le cardinal de $\pi^{-1}(\mathrm{W})$ en fonction de q, n et d.

   (iii) Démontrer l'identité
   $$|\mathrm{X}| = \sum_{\frac{n}{2} \leqslant d \leqslant n} \frac{\gamma_n(q)}{q^{(n-d)(3d-n)}\gamma_{n-d}(q)\gamma_{2n-d}(q)}.$$

Exercice 4 (Cardinal du groupe SO_2 sur un corps fini) — Pour tout corps $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2, on note $\mathrm{O}_2(\mathbf{K})$ le groupe des isométries de la forme quadratique $x^2 + y^2$ sur $\mathbf{K}^2$ et on désigne par $\mathrm{SO}_2(\mathbf{K})$ le sous-groupe des éléments de déterminant 1.

1. Démontrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbf{K}$ et $a^2 + b^2 = 1$.

   (*Indication : déterminer les conditions sur les colonnes d'une matrice* 2×2 *pour qu'elle appartienne à* $\mathrm{SO}_2(\mathbf{K})$.)

   Notons $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ tels que $a^2 + b^2 = 1$.

2. Supposons que -1 ne soit pas un carré dans $\mathbf{K}$.

   Démontrer que l'application
   $$\pi : \mathbf{K} \to \mathcal{C}(\mathbf{K}), \quad t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$
   est injective, et que son image est le complémentaire du point $(-1, 0)$.

   (*Indication : observer que le point* $\pi(t)$ *appartient à la droite passant par* $(-1, 0)$ *et de vecteur directeur* t.)

3. Supposons maintenant que -1 soit un carré dans $\mathbf{K}$ et notons $\pm i$ ses deux racines carrées dans $\mathbf{K}$.

   Démontrer que la formule précédente définit une bijection entre $\mathbf{K} - \{\pm i\}$ et le complémentaire du point $(-1, 0)$ dans $\mathcal{C}(\mathbf{K})$.

4. Supposons que le corps $\mathbf{K}$ soit fini, de cardinal q.

   (i) Démontrer que -1 est un carré dans $\mathbf{K}$ si et seulement si $(-1)^{\frac{q-1}{2}} = 1$.

   (*Indication : le groupe* $\mathbf{K}^\times$ *est cyclique ; si* ω *en est un générateur, les carrés sont les éléments de la forme* ω^{2a}...)

   (ii) Déduire de ce qui précède l'expression du cardinal de $\mathrm{SO}_2(\mathbf{K})$ en fonction de q.