

Fiche 9 — Groupes de Lie

Exercice 1 (Exemples) — Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $U(n)$ le groupe unitaire d'ordre n et H_n l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes d'ordre n . En utilisant l'application

$$f : M_n(\mathbf{C}) \longrightarrow H_n, \quad M \longmapsto M^*M,$$

démontrer que $U(n)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbf{C})$ et déterminer son espace tangent en I_n .

2. Soit p et q deux entiers naturels tels que $p + q = n$ et notons $I_{p,q}$ la matrice diagonale par blocs $\text{diag}(I_p, -I_q)$. Soit

$$O(p, q) = \{P \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tP I_{p,q} P = I_{p,q}\}.$$

En considérant l'application

$$f : M_n(\mathbf{R}) \longrightarrow S_n, \quad P \longmapsto {}^tP I_{p,q} P,$$

démontrer que $O(p, q)$ est une sous-variété de $M_n(\mathbf{R})$ et déterminer l'espace tangent en I_n . Démontrer que $SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(n)$ est également une sous-variété de $M_n(\mathbf{R})$, ayant le même espace tangent en I_n que $O(p, q)$.

Exercice 2 (Le groupe spécial unitaire) — Il s'agit de démontrer que $SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbf{C})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{R}^{2n^2}$.

1. Considérons l'application

$$\Phi : M_n(\mathbf{C}) \longrightarrow H_n \oplus \mathbf{C}, \quad X \longmapsto (X^* + X, \text{Tr}(X)).$$

Démontrer que l'image de Φ est le sous-espace vectoriel réel

$$\{(M, \lambda) \in H_n \oplus \mathbf{C} \mid \text{Tr}(M) = 2\text{Re}(\lambda)\}.$$

2. En déduire que l'application

$$\varphi : GL_n(\mathbf{C}) \longrightarrow H_n \times \mathbf{C}^\times, \quad M \longmapsto (M^*M, \det(M))$$

n'est pas une submersion au point I_n .

3. Démontrer que l'image de φ est contenue dans le sous-ensemble

$$V = \{(A, z) \in H_n \times \mathbf{C}^\times \mid \det(A) = |z|^2\}.$$

4. Démontrer que l'application

$$f : H_n \times \mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (A, z) \longmapsto |z|^2 - \det(A)$$

est une submersion en tout point de V . En déduire que V est une sous-variété de $H_n \times \mathbf{C}^\times$ et déterminer son espace tangent au point $(I_n, 1)$.

5. Démontrer que l'application

$$\pi : V \longrightarrow H_n \times \mathbf{R}, \quad (A, z) \longmapsto (A, \text{Im}(z))$$

réalise un difféomorphisme d'un voisinage de $(I_n, 1)$ dans V sur un voisinage de $(I_n, 0)$ dans $H_n \times \mathbf{R}$.

6. Dédurre de ce qui précède que $SU(n)$ est une sous-variété de $GL_n(\mathbf{C})$ et déterminer son espace tangent au point I_n .

Exercice 3 (Deux points de vue sur les algèbres de Lie) — On désigne par \mathbf{K} le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbf{K})$, d'élément neutre $1 = I_n$. On suppose que G est une sous-variété de $M_n(\mathbf{K})$ ¹.

On rappelle que l'espace tangent à G en 1 est l'ensemble des vecteurs tangents au point 1 aux courbes \mathcal{C}^1 tracées sur G et passant par 1 :

$$T_1G = \{X \in M_n(\mathbf{K}) \mid \exists f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, M_n(\mathbf{K})), f(\mathbf{R}) \subset G, f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = X\}.$$

On pose par ailleurs :

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbf{K}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \exp(tX) \in G\}.$$

1. Vérifier que $\mathfrak{g} \subset T_1G$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow G$ une courbe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = X \neq 0$.
 - (i) Démontrer qu'il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $X_m = \log f(\frac{1}{m})$ soit bien défini pour tout $m \geq m_0$.
 - (ii) Démontrer que la suite $(\frac{X_m}{\|X_m\|})$ converge vers $X/\|X\|$. (*Indication : calculer un développement limité de $\frac{X_m}{\|X_m\|}$.*)
 - (iii) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, écrivons

$$t = a_m\|X_m\| + b_m, \quad a_m \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq b_m < \|X_m\|.$$

Démontrer que l'on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \exp(a_m X_m) \in G \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{b_m X_m}{\|X_m\|}\right) = 1,$$

puis en déduire que X appartient à \mathfrak{g} .

— Conclure.

3. Dans les exemples du cours et des deux exercices précédents, reprendre la recherche de l'espace tangent en l'identité en utilisant l'exponentielle.

Exercice 4 ($SU(2)$ et $SO(3)$) — Soit \mathfrak{su}_2 l'espace des matrices de taille 2×2 anti hermitiennes et de trace nulle.

1. Vérifier que le déterminant est une forme quadratique définie positive sur \mathfrak{su}_2 .
2. Vérifier que l'action par conjugaison de $GL_2(\mathbf{C})$ sur $M_2(\mathbf{C})$ induit une action de $SU(2)$ sur \mathfrak{su}_2 qui préserve B .
3. En déduire un homomorphisme différentiable $\pi : SU(2) \rightarrow O(3)$ dont l'image est contenue dans $SO(3)$.
4. Démontrer que le noyau de π est $\{\pm I_2\}$. En déduire que la différentielle de π en I_2 est un isomorphisme.
5. En déduire que l'on a une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow SU(2) \xrightarrow{\pi} SO(3) \longrightarrow 1.$$

1. C'est en fait automatique en vertu d'un théorème d'Élie Cartan