Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1

Groupes Classiques et Géométrie

PARTIEL

26 Avril 2016

Durée : 2h

Exercice 1 *Question de cours:* Donner la définition d'un groupe topologique.

Exercice 2 Donner un système de représentants des orbites pour l'action de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ par conjugaison.

On pourra classifier dans un premier temps en fonction du nombre de valeurs propres avec multiplicité.

Exercice 3 Soit G un groupe topologique compact. Montrer qu'un sous groupe H est ouvert si et seulement s'il est fermé et d'indice fini.

Penser à revenir à la définition de la compacité par les recouvrements.

Exercice 4 On désigne par $\mathbb{K}$ le corps des réels ou celui des complexes. Soit n un entier strictement positif. On note

$$B := \{A = (a_{i,j})_{0\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid a_{i,j} = 0 \ \ \forall i > j\}$$

le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices (inversibles) triangulaires supérieures;

$$U := \{A = (a_{i,j})_{0\leq i,j\leq n} \in B \mid a_{i,i} = 1 \ \ \forall 1 \leq i \leq n\}$$

le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices (inversibles) triangulaires supérieures avec des coefficients 1 sur la diagonale; T le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales inversibles.

1. Montrer que B est un produit semi-direct $U \rtimes T$.
2. Préciser l'action de T sur U dans le produit semi-direct. (On ne demande pas de calcul explicite)

On note V l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$. Un *drapeau (complet)* de V est une chaîne d'inclusion de sous-espaces:

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V, \text{ avec } \dim V_i = i.$$

Soit

$$\mathcal{F} := \{(\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V) \mid \dim V_i = i \ \ \forall 0 \leq i \leq n\}$$

l'espace des drapeaux de V, muni de la topologie induite en tant que sous-ensemble du produit des grassmanniennes $\prod_{i=1}^n \mathrm{Gr}(i, V)$. On rappelle que l'on a muni la grassmannienne d'une topologie qui rend continue l'action naturelle du groupe linéaire.

3. Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur V induit une action naturelle sur $\mathcal{F}$ que l'on précisera.

4. On note $O := (\{0\} \subset \mathrm{Vect}\{e_1\} \subset \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} \subset \cdots \subset V)$ un élément, dit point-base, de $\mathcal{F}$. Calculer le stabilisateur de O.

5. Montrer que cette action est transitive. En déduire la connexité de $\mathcal{F}$ dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

6. Montrer la connexité de $\mathcal{F}$ dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ en utilisant un argument similaire.

Exercice 5 On note $\mathcal{S}_n$ le sous-espace des matrices symétriques réelles de taille n et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer que le complémentaire de $\mathcal{S}_n^{++}$ dans $\mathcal{S}_n$ est constitué des matrices symétriques S telles qu'il existe un vecteur colonne X vérifiant
$$ {}^tXX = 1,\ {}^tXSX \leq 0. $$

2. En déduire, en utilisant la compacité de la sphère, que $\mathcal{S}_n^{++}$ est ouvert dans $\mathcal{S}_n$, pour la topologie normique des espaces réels.

3. *(Question de cours)* A une matrice symétrique S, on associe la forme quadratique q_S dont la matrice est S dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si une matrice réelle S est de signature (r, s), alors
$$ r = \mathrm{Max}\{\dim(F),\ q_S \text{ est définie positive sur } F\}. $$

4. On note $\mathcal{S}_{+,\geq r}$ l'ensemble des matrices définies positives de signature (r', s') telles que $r' \geq r$. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{S}_{+,\geq r}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n$.

   On pourra considérer l'application (continue) qui envoie une forme quadratique sur sa restriction à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.