Université Lyon 1 – 2016-2017
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 1 – Autour du théorème du rang

Préambule — On fixe un corps commutatif $\mathbf{K}$. Soit $p \in \mathbf{N} - \{0\}$. On désigne par I_p la matrice identité d'ordre p et par $\mathrm{E}_{i,j}^{(p)}$ la matrice $p \times p$ dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 et les autres 0. Étant donné une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on désigne par W_σ la matrice (dans la base canonique) de l'application linéaire $\mathbf{K}^p \to \mathbf{K}^p$ définie par $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$. On considère par ailleurs les matrices $p \times p$ suivantes (D pour *dilatation* et T pour *transvection*) :

$$\begin{array}{c} 1 \leq i \leq p, \\ \alpha \in \mathbf{K},\ \alpha \neq 0 \end{array} \qquad \mathrm{D}_{i,\alpha}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{i-1} & & \\ & \alpha & \\ & & \mathrm{I}_{p-i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{c} 1 \leq i \neq j \leq p, \\ \beta \in \mathbf{K} \end{array} \qquad \mathrm{T}_{i,j;\beta}^{(p)} = \mathrm{I}_p + \beta\, \mathrm{E}_{i,j}^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \beta & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\beta \text{ en position } (i,j))$$

Exercice 1 (Mise en route) —

1. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, expliciter la matrice W_σ.
2. Démontrer que l'application
$$\mathfrak{S}_p \to \mathrm{GL}_p(\mathbf{K}), \quad \sigma \mapsto \mathrm{W}_\sigma$$
est un homomorphisme de groupes.
3. En déduire la variante suivante du théorème de Cayley : *tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$*, avec* p *convenable.*

Exercice 2 (Opérations élémentaires) — Soit A une matrice de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$. On désigne par L_i (resp. C_j) la i-ème ligne (resp. la j-ème colonne) de A. En calculant le produit $\mathrm{D}_{i,\alpha}^{(m)}\mathrm{A}$, vérifier qu'il s'agit de la matrice obtenue en remplaçant L_i par $\alpha\mathrm{L}_i$, ce que l'on notera : $\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\,\mathrm{L}_i$. Ceci donne la première colonne du tableau suivant, que l'on vérifiera :

opération	$\mathrm{D}_{i,a}^{(m)}\,\mathrm{A}$	$\mathrm{T}_{i,j;\beta}^{(m)}\,\mathrm{A}$	$\mathrm{W}_{(i,j)}\,\mathrm{A}$	$\mathrm{A}\,\mathrm{D}_{i,\alpha}^{(n)}$	$\mathrm{A}\,\mathrm{T}_{i,j;\beta}^{(n)}$	$\mathrm{A}\,\mathrm{W}_{(i,j)}$
résultat	$\mathrm{L}_i \leftarrow \alpha\,\mathrm{L}_i$	$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \beta\,\mathrm{L}_j$	$\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$	$\mathrm{C}_i \leftarrow \alpha\,\mathrm{C}_i$	$\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j + \beta\,\mathrm{C}_i$	$\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$

Question subsidiaire : pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, décrire les matrices $\mathrm{W}_\sigma\mathrm{A}$ et $\mathrm{A}\mathrm{W}_\sigma$.

Exercice 3 (Preuve effective du théorème du rang : l'algorithme de Gauss) — Soit A une matrice dans $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. Rappelons que le rang de A est par définition la dimension du sous-espace de $\mathbf{K}^m$ engendré par ses colonnes.

1. Vérifier que le rang de la matrice A est le rang de l'application linéaire $\varphi_\mathrm{A} : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$, $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$.
2. Prouver que le rang d'une matrice est invariant par les opérations élémentaires de l'exercice précédent.
3. En utilisant l'algorithme de Gauss, démontrer que toute matrice $m \times n$ est équivalente à une matrice de la forme
$$\mathrm{I}_{m,n;r} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \text{où } \ r \in \{0, \ldots, \min\,\{m,n\}\}.$$

4. Démontrer que l'entier r dans la question précédente est le rang de A. En déduire le théorème du rang : $\dim \ker \mathrm{A} + \mathrm{rg}\ \mathrm{A} = n$.
5. Démontrer que les rangs d'une matrice et de sa transposée sont égaux.

Exercice 4 (Calculs dans SL_2) — 1. Exprimer la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ à l'aide des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (et de leurs inverses).

2. Soit $d_1, d_2 \in \mathbf{K}^\times$. Démontrer que les matrices

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

se déduisent l'une de l'autre par multiplication par des transvections (il pourra être utile d'utiliser le résultat de la question précédente).

Exercice 5 (Générateurs du groupe linéaire) — Soit $\mathcal{X}$ le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ formé des dilatations et des transvections. Soit $\mathcal{Y}$ le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ obtenu en adjoignant les matrices de permutation à $\mathcal{X}$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$. En appliquant l'algorithme de Gauss, démontrer qu'il existe des matrices P et Q qui sont des produits d'éléments de $\mathcal{Y}$ et telles que $\mathrm{PAQ} = \mathrm{I}_p$.
2. En déduire que le groupe $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ est engendré par $\mathcal{Y}$.
3. En utilisant la question de l'exercice 4 et en adaptant convenablement l'algorithme de Gauss, démontrer qu'il existe des matrices P et Q, produits d'éléments de $\mathcal{X}$, telles que $\mathrm{PAQ} = \mathrm{I}_p$.
4. En déduire que le groupe $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ est engendré par $\mathcal{X}$.

Exercice 6 (Générateurs du groupe spécial linéaire) — Soit $\mathcal{T} = \{\mathrm{T}^{(p)}_{i,j;\beta} \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant p,\ \beta \in \mathbf{K}\}$ l'ensemble des transvections du préambule.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$. En appliquant l'algorithme de Gauss sans les dilatations, démontrer qu'il existe des matrices P et Q produits d'éléments de $\mathcal{T}$ telles que
$$\mathrm{PAQ} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_p)$$
(utiliser la question 1 de l'exercice 4 pour éliminer les matrices de permutations).
2. En utilisant la question 2 de l'exercice 4, en déduire qu'il existe des matrices P' et Q' produits d'éléments de $\mathcal{T}$ telles que $\mathrm{P}'\mathrm{A}\mathrm{Q}' = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \det(\mathrm{A}))$.
3. En déduire que le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_p(\mathbf{K})$ est engendré par $\mathcal{T}$.

Exercice 7 (Connexité) — Dans cet exercice, le corps $\mathbf{K}$ sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et l'on considère la toplogie usuelle sur les groupes $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_p(\mathbf{K})$.

1. Pour $\mathrm{A} = \mathrm{D}^{(p)}_{i,\alpha}$ ou $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{(p)}_{i,j;\beta}$, définir une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}_p(\mathbf{C})$ telle que $\gamma(0) = \mathrm{I}_p$ et $\gamma(1) = \mathrm{A}$.
2. En utilisant les résultats des exercices 5 et 6, en déduire une démonstration de la connexité des groupes topologiques $\mathrm{GL}_p(\mathbf{C})$, $\mathrm{SL}_p(\mathbf{C})$ et $\mathrm{SL}_p(\mathbf{R})$.
3. Démontrer que $\mathrm{GL}_p(\mathbf{R})$ n'est pas connexe, mais que le sous-groupe
$$\mathrm{GL}_p(\mathbf{R})^+ = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K}) \mid \det(\mathrm{A}) > 0\}$$
l'est (utiliser la question 2 de l'exercice 6).

Exercice 8* (Algorithme de Gauss sur $\mathbf{Z}$) — L'objectif est d'adapter l'algorithme de Gauss aux matrices à coefficients entiers.

1. Soit $p \in \mathbf{N} - \{0\}$. Justifier qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_p(\mathbf{Z})$ est inversible si et seulement si $\det \mathrm{M} = \pm 1$. Comment cet énoncé se généralise-t-il si l'on remplace $\mathbf{Z}$ par un anneau commutatif unitaire quelconque ?

On adapte les notations du préambule en posant $\mathrm{T}^{(p)}_{i,j;a} = \mathrm{I}_p + a\mathrm{E}^{(p)}_{ij}$ pour tous i, j distincts dans $\{1, \dots, p\}$ et tout $a \in \mathbf{Z}$; ce sont des éléments de $\mathrm{SL}_p(\mathbf{Z})$ (*matrices de transvections*). On désigne par $\mathrm{D}^{(p)}_i$ la matrice $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1) \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{Z})$, où -1 est en i-ème position (*matrice de dilatation*).

2. Vérifier que, pour tous i, j distincts dans $\{1, \dots, p\}$, la matrice

$$\mathrm{W}'_{(i,j)} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{i-1} & & & & \\ & 0 & \dots & 1 & \\ & & \mathrm{I}_{j-i-1} & & \\ & -1 & \dots & 0 & \\ & & & & \mathrm{I}_{p-j} \end{pmatrix}.$$

est un produit de matrices de transvections et appartient à $\mathrm{SL}_p(\mathbf{Z})$.

Étant donné $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{Z})$, on vérifie immédiatement que multiplier A à gauche (resp. à droite) par les matrices introduites ci-dessus s'interprète en termes d'opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes), exactement comme dans l'exercice 1. On se propose maintenant de démontrer l'analogue suivant du théorème du rang pour les matrices à coefficients entiers :

Soit A *une matrice de taille* $m \times n$ *à coefficients dans* $\mathbf{Z}$. *Il existe des matrices* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{Z})$ *et* $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, *produits de matrices de transvection et de dilatations, telles que*

$$\mathrm{PAQ}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } r \in \mathbf{N},\ d_i > 0 \text{ et } d_1|d_2,\ d_2|d_3, \dots d_{r-1}|d_r.$$

3. Posons $||\mathrm{A}|| = \max\{|a_{ij}|\}$ et supposons $\mathrm{A} \neq 0$. En raisonnant par récurrence sur $||\mathrm{A}||$, démontrer que des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permettent de se ramener au cas où $a_{11} > 0$ et $a_{11} = \min\{|a_{ij}| \mid a_{ij} \neq 0\}$, puis au cas où
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$$
avec $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{m-1,n-1}(\mathbf{Z})$. (*Indication* : l'observation-clef est que les opérations élémentaires permettent d'effectuer la *division euclidienne* de a_{i1} et a_{1i} par a_{11})
4. Si B possède un coefficient b non divisible par a_{11}, démontrer que des opérations élémentaires permettent de faire décroître strictement $||\mathrm{A}||$. (*Indication* : ajouter la colonne contenant b à la première colonne de A et faire une division euclidienne)
5. Achever la démonstration.

On va maintenant préciser le théorème ci-dessus en établissant l'*unicité des entiers* r *et* $d_1, \dots, d_r$.

6. Justifier l'unicité de r en utilisant l'inclusion $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{Z}) \subset \mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{Q})$.
7. Si $\mathrm{A} \neq 0$, démontrer que d_1 est le pgcd des coefficients de A.
8. Plus généralement, pour tout $s \in \{1, \dots, r\}$, démontrer que le produit $d_1 \cdots d_s$ est le pgcd des mineurs d'ordre s de A. (*Indication* : utiliser la formule principale de l'exercice 7)

Trois questions subsidiaires

9. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_p(\mathbf{Z})$, adapter la démonstration ci-dessus pour obtenir $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{SL}_p(\mathbf{Z})$ produits de transvections uniquement. (*Indication* : observer que $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j = \mathrm{W}^2_{(i,j)}$ pour tout i, j distincts dans $\{1, \dots, p\}$)
10. En déduire que le groupe $\mathrm{SL}_p(\mathbf{Z})$ est engendré par les $2(p^2 - p)$ matrices $\mathrm{T}_{i,j} = \mathrm{I}_p \pm \mathrm{E}_{i,j}$.
11. Généraliser tout ce qui précède au cas d'un anneau euclidien quelconque (par exemple, $\mathbf{K}[\mathrm{T}]$...) !