

Fiche 2 – Topologie des espaces de matrices, groupes topologiques

Dans tout ce qui suit, on désigne par \mathbf{K} le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} et on munit $M_{p,q}(\mathbf{K})$ de sa topologie de \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 (Sur les matrices de rang r) — Soit p, q deux entiers naturels non nuls. On considère une matrice $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$ que l'on suppose de rang $r < \min\{p, q\}$ et on fixe un entier ρ tel que $r + 1 \leq \rho \leq \min\{p, q\}$.

Démontrer qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de matrices dans $M_{p,q}(\mathbf{K})$ qui converge vers A et telle que $\text{rg}(A_n) = \rho$ pour tout n . (*Indication : commencer par examiner le cas où A est sous forme normale.*)

Exercice 2 (Topologie de l'espace des symétries) — Soit \mathcal{S} le sous-ensemble de $M_n(\mathbf{K})$ formé des matrices S telles que $S^2 = I_n$ (symétries). On considère les fonctions ρ_+ et ρ_- définies par

$$\rho_{\pm} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{N}, \quad S \mapsto \text{rg}(S \pm I_n).$$

1. Quel lien existe-t-il entre ρ_+ et ρ_- sur \mathcal{S} ?
2. Démontrer que les fibres de ρ_+ et ρ_- sont des parties ouvertes et fermées de \mathcal{S} .
3. En considérant l'action naturelle de $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ sur \mathcal{S} par conjugaison, démontrer que les fibres de ρ_+ et ρ_- sont des parties connexes de \mathcal{S} .

Exercice 3 (Propriétés élémentaires des groupes topologiques [F1, F2]) — Soit G un groupe topologique.

1. Soit $g_0 \in G$. Montrer que les applications $L_{g_0} : G \rightarrow G, g \mapsto g_0g$ et $R_{g_0} : G \rightarrow G, g \mapsto gg_0$ sont des homéomorphismes.
2. Démontrer que si $U \subset G$ est un ouvert et $V \subset G$ est une partie quelconque, alors $U^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in U\}$ et $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ sont ouverts.
3. Démontrer que si U et V sont compacts alors UV est compact.

En revanche, le produit de deux fermés n'est pas nécessairement fermé... Pouvez-vous donner un exemple de groupe et de parties fermées U et V telles que UV ne soit pas fermé?

Exercice 4 (Voisinages [F3]) — Soit G un groupe topologique.

1. Démontrer que, lorsque V parcourt un système fondamental de voisinage de 1, les ensembles Vg_0 , (resp. g_0V) forment un système fondamental de voisinages de g_0 .
2. Démontrer que l'application $f : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gg_0h^{-1}$ est continue. En déduire, lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de 1, les ensembles Vg_0V^{-1} forment un système fondamental de voisinages du point g_0 de G .

Exercice 5 (Un extrait d'examen) — Soit G un groupe topologique connexe et soit H un sous-groupe distingué et discret de G . Démontrer que H est abélien. (*Indication : considérer l'action de G sur H par conjugaison et étudier la topologie des orbites.*)