Université Lyon 1 – 2016-2017
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 3 – Groupes topologiques

Exercice 1 (Une observation importante) — Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe de G. Démontrer que, si H est ouvert, alors H est également fermé. Que peut-on en déduire sur H si G est connexe ?

Exercice 2 (Adhérence [F4]) — Soit G un groupe topologique. On désigne par $\overline{\mathrm{A}}$ l'adhérence de la partie A de G.

1. (a) Soit U un voisinage de 1 et soit g, h dans G. Montrer qu'il existe un ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ tel que $g\mathrm{V}h\mathrm{V} \subset gh\mathrm{U}$.
   (b) En déduire que si g et h sont dans les adhérences $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ de parties A et B de G, alors $gh\mathrm{U} \cap \mathrm{AB} \neq \varnothing$.
   (c) Démontrer que $\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{AB}}$.
2. Prouver l'égalité $\overline{\mathrm{A}}^{-1} = \overline{\mathrm{A}^{-1}}$.
3. Montrer que pour tout g, h dans G, $g\,\overline{\mathrm{A}}\,h = \overline{g\mathrm{A}h}$.
4. On suppose que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$. En considérant l'application f : $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$, prouver que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}$.
5. Démontrer que l'adhérence d'un sous groupe H de G est un sous groupe de G, puis que $\overline{\mathrm{H}}$ est abélien si et seulement si H l'est.

Exercice 3 (Adhérence d'une orbite [F5]) Soit G un groupe topologique agissant continûment sur un espace topologique X.

1. Soit g dans G. Montrer que l'action de g est un homéomorphisme de X.
2. Soit $\mathcal{O}$ une orbite et $\overline{\mathcal{O}}$ son adhérence. Montrer que $g \cdot \overline{\mathcal{O}} = \overline{g \cdot \mathcal{O}} = \overline{\mathcal{O}}$.
3. En déduire que l'action de G sur X induit une action de G sur $\overline{\mathcal{O}}$, puis que $\overline{\mathcal{O}}$ est une réunion d'orbites pour G.

Exercice 4 (Composante neutre [F8, F9]) — Soit G un groupe topologique. On désigne par G° la composante connexe de 1.

1. Démontrer que G° est fermée (*indication : vérifier que l'adhérence de* G° *est connexe...*).
2. Démontrer que G° est stable par conjugaison.
3. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, démontrer que $g\mathrm{G}^\circ$ est la composante connexe de g.
4. Démontrer que si H est un sous-groupe ouvert inclus dans G°, alors $\mathrm{H} = \mathrm{G}^\circ$.
5. Démontrer que si G est connexe, alors tout voisinage V de 1 engendre G, i.e.
$$\mathrm{G} = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{V}^n.$$
   (*Indication* : observer que l'on peut restreindre V de sorte que $\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{V}$).
6. Démontrer que G° est ouvert si et seulement si 1 a un voisinage connexe dans G.
7. On considère le sous-groupe $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{R}$ muni de la topologie métrique induite.
   (a) Démontrer que $\mathbf{Q}$ n'est pas discret.
   (b) Démontrer que la composante neutre de $\mathbf{Q}$ est $\{0\}$ (cet exemple montre que G° n'est en général pas ouverte).

Exercice 5 (Sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ [F14, F15, F20]) —

1. Soit H un sous-groupe non trivial de $\mathbf{R}$.
   (a) Justifier l'existence de la borne inférieure a de $\mathrm{H} \cap \mathbf{R}_{>0}$.
   (b) Démontrer que si a est non nul, alors $\mathrm{H} = a\mathbf{Z}$.
   (c) Démontrer que si a est nul, alors H est dense dans $\mathbf{R}$.
   (d) En déduire que tout sous-groupe de $\mathbf{R}$ est soit cyclique, soit dense.
2. Soit α un nombre réel et soit $\mathrm{H} = \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.
   (a) Supposons que α soit rationnel et écrivons $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$. Démontrer que H est le groupe $\frac{1}{q}\mathbf{Z}$.
   (b) Démontrer que, si α est irrationnel, alors H est dense dans $\mathbf{R}$.
   (c) En déduire que tout élément de $[-1, 1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbf{N}}$ (*indication* : on pourra utiliser, en le justifiant, le fait que l'image d'une partie dense par une application continue *surjective* est encore dense).
3. Soit G le groupe quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, muni de la topologie quotient ; on note $\pi : \mathbf{R}^2 \to \mathrm{G}$ la projection canonique. Fixons un nombre irrationnel ϑ. On note H_0 le sous-groupe de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (x, y) tels que $y = \theta x$, H son image par la projection π et $\tilde{\mathrm{H}}$ la saturation de H_0, c'est-Ã -dire :
$$\tilde{\mathrm{H}} = \pi^{-1}(\pi(\mathrm{H}_0)).$$
   (a) Démontrer que $\tilde{\mathrm{H}}$ est dense dans $\mathbf{R}^2$ et en déduire que H est dense dans G.
   (b) Le groupe quotient G/H est-il séparé ?
4. Prouver que, pour tout n, le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ contient exactement un sous-groupe fini de cardinal n et que ses sous-groupes infinis sont denses.
5. On considère le sous-groupe $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ muni de la topologie métrique induite.
   (a) Montrer (le résultat bien connu) que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la composante connexe de l'élément neutre 0 est $\{0\}$.

Exercice 6 (Groupes classiques compacts [F24]) —

1. Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Démontrer que les groupes topologiques $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont compacts.
2. On définit le groupe symplectique complexe comme le stabilisateur d'une forme bilinéaire anti-symétrique non dégénérée :
$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^tAJ_nA = J_n\right\} \text{ où } J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$
   Soit $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \cap U(n)$ le groupe symplectique compact. Prouver que le groupe symplectique compact est bien compact.