Université Lyon 1 – 2016-2017
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 6 — Formes quadratiques

Exercice 1 (Critère de Sylvester pour les matrices symétriques définies positives. [D3])**.** Soit A une matrice carrée réelle symétrique de taille n. Pour tout k de 1 à n, on appelle mineur principal Δ_k de A le mineur correspondant aux k premières lignes et aux k premières colonnes de la matrice A.

1. Si A est définie positive, montrer que ses mineurs principaux sont tous strictement positifs.
2. Montrer réciproquement que si tous les mineurs principaux sont strictement positifs, alors la matrice A est définie positive.

Exercice 2 (Produit de matrices symétriques 1. [D4])**.** Soit A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, avec A inversible. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $(\ ,\ )$. On notera $< X, Y >_A = (AX, Y)$, resp. $< X, Y >_B = (BX, Y)$, la forme bilinéaire symétrique associée canoniquement à A, resp. B.

1. Montrer que $A^{-1}B$ est autoadjointe pour la forme $<\ ,\ >_A$, i.e. montrer que $< A^{-1}BX, Y >_A = < X, A^{-1}BY >_A$.
2. On suppose que $<\ ,\ >_A$ et $<\ ,\ >_B$ possèdent une base commune d'orthogonalisation. Montrer que $A^{-1}B$ est diagonalisable.
3. Réciproquement, on suppose que $A^{-1}B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que B est inversible. Montrer que $<\ ,\ >_A$ et $<\ ,\ >_B$ possèdent une base commune d'orthogonalisation.
4. On suppose $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1}B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Produit de matrices symétriques 2. [D6])**.** Soit A, B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe P inversible et D diagonale positive telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$. En déduire que AB est diagonalisable à valeurs propres positives.

Exercice 4 (Dual de l'algèbre des matrices.[D9])**.** Soit $\mathbf{K}$ un corps, n un entier positif, et φ une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées de taille n.

1. Montrer que la forme qui envoie (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{tr}(AB)$ est bilinéaire, symétrique et non dégénérée.
2. Soit φ une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que
$$\varphi(X) = \mathrm{tr}(AX),$$
pour toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
3. Application 1 : Montrer que si de plus φ vérifie $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ pour tout X, Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors $\varphi = \lambda\,\mathrm{tr}$ pour un λ dans $\mathbf{K}$.
4. Application 2 : Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice 5 (Formes quadratiques liées à la trace. [D11])**.**

1. Montrer que la forme $tr({}^tAB)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe compact.
2. Montrer que $A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$ définit une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, où $\mathbf{K}$ est de caractéristique différente de 2.
3. On étudie sa restriction au sous-espace des matrices symétriques, puis au sous-espace des matrices antisymétriques. Montrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour la forme quadratique.
4. On pose ici $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. Montrer que la signature de cette forme quadratique est $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$.
5. Montrer que si S est une matrice symétrique de signature (p, q), alors $A \mapsto \mathrm{tr}({}^tASA)$ est de signature (np, nq).

Exercice 6 (Adhérence des orbites de congruence. [D12])**.**

Nous avons vu que l'adhérence d'une orbite de congruence réelle est de la forme $\bigcup_{\substack{0\le h\le p\\0\le k\le q}} \mathrm{Orb}(I_{(p-h,q-k)})$. Ce résultat repose essentiellement sur le fait que cette réunion est un fermé. Le but de l'exercice est de fournir une méthode alternative pour prouver cette assertion.

1. Montrer que l'application σ, de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans l'espace topologique quotient $\mathbb{R}^n/\mathfrak{S}_n$, qui envoie une matrice S sur son spectre, est une application continue.
2. En déduire que $\bigcup_{\substack{0\le h\le p\\0\le k\le q}} \mathrm{Orb}(I_{(p-h,q-k)})$ est fermé.

Exercice 7 (Connexité des classes de congruences de matrices symétriques réelles. [D14])**.**

Soit n un entier naturel non nul. Étant donné deux entiers p et q, on a noté $\mathcal{O}_{p,q}$ la partie de $\mathcal{S}_n$ formée des matrices de signature (p,q) : ce sont les orbites pour l'action par congruence de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ des matrices de déterminant strictement positif est connexe.

1. On fait agir le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ sur $\mathcal{S}_n$ par congruence : pour $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ et $A \in \mathcal{S}_n$, l'action de g sur A est donnée par : $g \cdot A = g\,A\,{}^t g$. Montrer que les orbites de cette action sont les parties $\mathcal{O}_{p,q}$, où (p,q) est un couple d'entiers naturels tels que $p+q \le n$.
2. En déduire que pour tout couple (p,q), l'orbite $\mathcal{O}_{p,q}$ est connexe.
3. Soit $\mathcal{S}_n^\times$ l'ensemble des matrices symétriques inversibles. Montrer que les composantes connexes de $\mathcal{S}_n^\times$ sont les $\mathcal{O}_{p,q}$, où (p,q) parcourt l'ensemble des couples tels que $p+q=n$.

Exercice 8 (Continuité de l'orthogonal– [D15, D16, D18])**.** Montrer que les applications sont continues pour la topologie des grassmanniennes réelles.

1. Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne et k un entier, $0 \le k \le n$. On considère l'application $\perp\colon \mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gr}_{n-k,n}(\mathbb{R})$ qui à un sous-espace F de dimension k associe son orthogonal.
2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et k un entier, $0 \le k \le n$. On considère l'application $\perp\colon \mathrm{Gr}_k(E) \to \mathrm{Gr}_{n-k}(E^*)$ qui à un sous-espace F de dimension k de E associe son orthogonal dans le dual E^*.
3. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$. On considère l'application $\perp\colon \mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gr}_{n-k,n}(\mathbb{R})$ qui à un sous-espace F de dimension k associe son orthogonal $F^\perp$ pour q.

Exercice 9 (Produits scalaires du plan [D30])**.**

Soit $\mathcal{S}_2^{++}$ l'ensemble des matrices réelles 2×2 symétriques définies positives.

1. À un élément $z=(x,y)$ du demi-plan de Poincaré
$$\mathcal{H} := \{z = x+iy \in \mathbb{C},\, x\in\mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}^{+*}\},$$
on associe le produit scalaire $f(z) \in \mathcal{S}_2^{++}$ pour lequel $((1,0),(x,y))$ est une base orthonormée. Dessiner l'image de f.
2. On fait agir $\mathbb{R}_+^*$ par multiplication sur $\mathcal{S}_2^{++}$ et on munit $\mathcal{S}_2^{++}/\mathbb{R}_+^*$ de la topologie quotient. Montrer que la composée de f et de la projection canonique est un homéomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{S}_2^{++}/\mathbb{R}_+^*$. Décrire sa réciproque.
3. Établir un lien direct entre $\mathcal{S}_2^{++}/\mathbb{R}_+^*$ et l'espace des structures complexes $\mathcal{C}$.