Fiche 7 — Décomposition polaire

Exercice 1 (Formes normales des endomorphismes orthogonaux, symétriques et antisymétriques [D34]) — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

1. Démontrer que tout endomorphisme de E admet un sous-espace invariant $\mathrm{W} \subset \mathrm{E}$ avec $\dim \mathrm{W} \leq 2$. (On pourra raisonner matriciellement et considérer les parties réelle et imaginaire d'un vecteur propre sur $\mathbf{C}$.)
2. Soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout sous-espace V de E,
$$f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V} \Longrightarrow f(\mathrm{V}^{\perp}) \subset \mathrm{V}^{\perp}.$$
Démontrer qu'il existe une décomposition orthogonale $\mathrm{E} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathrm{W}_i$ en sous-espaces f-invariants W_i avec $\dim \mathrm{W}_i \leq 2$. (Raisonner par récurrence sur $\dim \mathrm{E}$.)
3. Montrer que si g est un endomorphisme de E et V un sous-espace de E stable par g, alors, $V^{\perp}$ est stable par l'adjoint g^* de g. En déduire que les endomorphismes symétriques, antisymétriques et orthogonaux, vérifient la propriété étudiée.
4. En déduire que

   (a) tout endomorphisme symétrique est $\mathrm{O}(n)$-diagonalisable,

   (b) la matrice de tout endomorphisme orthogonal est $\mathrm{O}(n)$-semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_+} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n_-} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \mathrm{R}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{R}_r \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \mathrm{R}_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}, \ \vartheta_i \in \mathbf{R},$$

   (c) la matrice de tout endomorphisme antisymétrique est $\mathrm{O}(n)$-semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_r \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \vartheta_i \\ -\vartheta_i & 0 \end{pmatrix}, \ \vartheta_i \in \mathbf{R}.$$

Exercice 2 (Exponentielle réelle) — On désigne par $\mathrm{A}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices antisymétriques.

1. Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, démontrer que le spectre de $\exp(\mathrm{A})$ est $\{e^{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\}$.
2. En déduire que la matrice $\mathrm{M}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle (*indication : sinon, voir que* M_0 *serait diagonalisable sur* $\mathbf{C}$).
3. Démontrer l'identité
$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$
pour tout $\vartheta \in \mathbf{R}$.

4. À l'aide de l'exercice précédent, en déduire que l'exponentielle induit par restriction une application surjective
$$\exp : \mathrm{A}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{SO}(n).$$
5. Démontrer que toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})_+$ s'écrit comme le produit de deux exponentielles réelles.

Exercice 3 (La décomposition polaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ [B3]) –

1. Montrer que, pour tout A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique $H \in \mathcal{H}_n^{++}$ telle que $H^2 = A^*A$.
2. Montrer que $U := AH^{-1} \in U(n)$ et en déduire que, pour tout A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $(H, U) \in \mathcal{H}_n^{++} \times U(n)$ tel que $A = UH$.
3. Montrer que la réciproque de la multiplication est continue.
4. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Exercice 4 (Des matrices réelles $U(n)$-semblables sont $O(n)$-semblables [B7]) –

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in U(n)$ telles que $A = UBU^*$. On veut montrer que A et B sont $O(n)$-semblables.

1. Soit $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $X + iY = U$. Montrer qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $X + \eta Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $P := X + \eta Y$.
2. Montrer que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P{}^tBP^{-1}$. En déduire que B commute avec ${}^tPP$.
3. Soit $P = VR$ la décomposition polaire de P, avec $V \in \mathrm{O}(n)$ et $R \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer que B commute avec R. En déduire que A et B sont $\mathrm{O}(n)$-semblables.

Exercice 5 (Connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$) – Donner, en vous servant de la décomposition polaire, une preuve de la connexité du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$.

Exercice 6 (Une matrice orthogonale dans tout hyperplan) – Montrer, en utilisant la décomposition polaire, que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.

Exercice 7 (Image de l'exponentielle, cas réel) –

1. Montrer que si A est l'image $\exp(B)$ d'une matrice réelle B, alors A est le carré d'une matrice réelle.
2. Montrer la réciproque : l'image de l'exponentielle réelle est égale à l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $M \mapsto M^2$.

Exercice 8 (Maximalité du groupe orthogonal parmi les groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$) — Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant $\mathrm{O}(n)$. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$.

1. Soit $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$ la décomposition polaire de A, i.e. $\mathrm{O} \in \mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n^{++}$. Démontrer que :
$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \mathrm{S}^k \in \mathrm{G}.$$
2. En déduire que 1 est l'unique valeur propre de S (*Indication : introduire une norme sur* $\mathbf{R}^n$ *et la norme subordonnée sur* $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$*, puis démontrer que chaque valeur propre de* S *engendre un sous-groupe borné de* $\mathbf{R}_+^*$).
3. En déduire $\mathrm{G} = \mathrm{O}(n)$.

Exercice 9 (Réduction des endomorphismes hermitiens) — Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)$. Soit $f \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$ un endomorphisme auto-adjoint :
$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

1. Démontrer qu'il existe une droite W dans E telle que $f(\mathrm{W}) \subset \mathrm{W}$ et $f(\mathrm{W}^\perp) \subset \mathrm{W}^\perp$.

2. En déduire que toute matrice hermitienne est $\mathrm{U}(n)$-diagonalisable.

Soit H_n (resp. H_n^{++}) le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ formé des matrices hermitiennes (resp. hermitiennes définies positives).

3. En adaptant la preuve du cours pour les matrices symétriques réelles, démontrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme entre H_n et H_n^{++}.
4. En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, l'application $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{H}^k$ réalise un homéomorphisme de H_n^{++} sur lui-même.

Exercice 10 (Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$) — D'après l'exercice précédent, l'application exponentielle réalise un homéomorphisme de H_n sur H_n^{++}. On désigne par $\ell : \mathrm{H}_n^{++} \to \mathrm{H}_n$ l'homéomorphisme réciproque.

1. Démontrer que les applications

$$\mathrm{U}(n) \times \mathrm{H}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \quad (\mathrm{U}, \mathrm{H}) \longmapsto \mathrm{UH}$$

   et

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{U}(n) \times \mathrm{H}_n, \quad \mathrm{M} \longmapsto \left(\mathrm{M}e^{-\frac{1}{2}\ell({}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M})}, \frac{1}{2}\ell({}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M})\right)$$

   sont des homéomorphismes bien définis et réciproques l'un de l'autre.
2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{U}(n) \times \mathbf{R}^{n^2}$.
3. En adaptant le raisonnement de l'exercice 3, démontrer que $\mathrm{U}(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 11 (Étude de $\mathrm{O}(p,q)$) — Soit p, q deux entiers naturels non nuls. On désigne par $\mathrm{O}(p,q)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbf{R})$ formé des isométries de la forme quadratique standard de signature (p,q) sur $\mathbf{R}^{p+q}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{O}(p,q) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbf{R}), \quad ; \quad {}^t\mathrm{M}\mathrm{I}_{p,q}\mathrm{M} = \mathrm{I}_{p,q}\}$$

où $\mathrm{I}_{p,q}$ est la matrice $\mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q)$.

1. Vérifier que $\mathrm{O}(p,q)$ est stable par transposition.
2. Soit $\mathrm{T} \in \mathrm{S}_n^{++}$ et soit $\sqrt{\mathrm{T}}$ sa racine carrée dans S_n^{++}.
   (i) Démontrer qu'il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\sqrt{\mathrm{T}} = \mathrm{P}(\mathrm{T})$ et $\sqrt{\mathrm{T}}^{-1} = \mathrm{P}(\mathrm{T}^{-1})$.
   (*Indication : penser à un polynôme interpolateur...*)
   (ii) En déduire que, si $\mathrm{T} \in \mathrm{O}(p,q)$, alors $\sqrt{\mathrm{T}} \in \mathrm{O}(p,q)$.
3. Démontrer que la décomposition polaire $(\mathrm{O}, \mathrm{S}) \mapsto \mathrm{OS}$ induit un homéomorphisme

$$(\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(p+q)) \times (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{S}_{p+q}^{++}) \simeq \mathrm{O}(p,q).$$

4. Démontrer que l'on a

$$\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(p+q) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{A} \in \mathrm{O}(p), \ \mathrm{D} \in \mathrm{O}(q) \right\} \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q).$$

5. Soit L le sous-espace vectoriel de S_{p+q} formé des matrices symétriques S telles que $\mathrm{SI}_{p,q} + \mathrm{I}_{p,q}\mathrm{S} = 0$.
   (i) Démontrer que L est un espace vectoriel réel de dimension pq.
   (ii) Démontrer que l'exponentielle réalise un homéomorphisme de L sur $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{S}_{p+q}^{++}$.
   (*Indication : observer que la condition $e^{\mathrm{S}}\ \mathrm{I}_{p,q}\ e^{\mathrm{S}} = \mathrm{I}_{p,q}$ s'écrit de manière équivalente sous la forme $\mathrm{I}_{p,q}\ e^{\mathrm{S}}\ \mathrm{I}_{p,q}^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{S}}$.*)

6. Déduire de ce qui précède que le groupe $\mathrm{O}(p,q)$ est homéomorphe à $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbf{R}^{pq}$.
7. (Application) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbf{R}^n$. Démontrer que son groupe d'isométries $\mathrm{O}(q)$ est compact si et seulement si q est définie.

Exercice 12 (Un extrait d'examen) — Soit φ un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. On fixe un entier m dans $\{1,\dots,n-1\}$ et on suppose que φ préserve le volume des parallélépipèdes de dimension m, au sens suivant [1] : φ envoie un parallélépipède de dimension m et de m-volume ν sur un parallélépipède de dimension m et de m-volume ν. On veut démontrer que φ est une isométrie.

1. Démontrer que φ est inversible.
2. Soit $\varphi = o\sigma$ la décomposition polaire de φ, avc $o \in \mathrm{O}_n$ et $\sigma \in \mathrm{S}_n^{++}$. Démontrer que σ conserve les m-volumes.
3. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de σ. Démontrer que, pour toute application injective $f : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$,
$$\prod_{i=1}^{m} \lambda_{f(i)} = 1.$$
4. En déduire que σ est l'identité, puis conclure.

   (*Indication : dans un premier temps, on pourra établir* $\lambda_i = \lambda_j$ *pour tous* $i,j \in \{1,\dots,n\}$ *en choisissant une partie* I *à* $m-1$ *éléments non contenant ni* i *ni* j.)

1. On rappelle qu'un parallélépipède de dimension m dans $\mathbf{R}^n$ est une partie Π de la forme
$$p + \sum_{i=1}^{m} [0,1]v_i = \{p + \sum_{i=1}^{m} x_i v_i, \quad x_i \in [0,1]\}$$
où p est un point de $\mathbf{R}^n$ et $v_1,\dots,v_m$ sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{R}^n$. Le m-volume de Π est défini par
$$\mathrm{Vol}_m(\Pi) = |\det_{\mathcal{B}}(v_1,\dots,v_m)|,$$
où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée (n'importe laquelle) de la direction du sous-espace $\langle \mathrm{P} \rangle$.