

## Fiche 8 — Comptage sur les corps finis

**Exercice 1** (Isomorphismes exceptionnels) — Étant donné un espace vectoriel  $V$ , on appelle *espace projectif* associé à  $V$  et on note  $\mathbf{P}(V)$  l'ensemble des droites vectorielles de  $V$  (autrement dit,  $\mathbf{P}(V)$  est la grassmannienne  $\mathbf{Gr}_1(V)$ ). L'action naturelle du groupe  $\mathrm{GL}(V)$  sur  $V$  induit de façon évidente une action de  $\mathrm{GL}(V)$  sur  $\mathbf{P}(V)$ . Il est recommandé d'avoir cette construction en tête pour répondre aux questions suivantes...

1. Construire des isomorphismes

$$\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5.$$

2. Soit  $n \in \mathbf{N}$  et soit  $G \leq \mathfrak{S}_n$  un sous-groupe d'indice  $n$ . On se propose de démontrer que  $G$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_{n-1}$ .

(i) Étudier directement le cas  $n \leq 4$ .

(ii) Supposons  $n \geq 5$  et soit  $X = \mathfrak{S}_n/G$ . Démontrer que l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $X$  par translations fournit un isomorphisme  $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{S}(X)$  identifiant  $G$  au stabilisateur d'un point de  $X$ . Conclure.

3. Construire des isomorphismes

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5 \quad \text{et} \quad \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5.$$

**Exercice 2** (Cône nilpotent sur un corps fini) — Soit  $\mathbf{K}$  un corps fini à  $q$  éléments et soit  $\mathcal{N}$  l'ensemble des matrices nilpotentes dans  $M_3(\mathbf{K})$ . On se propose de calculer le cardinal de  $\mathcal{N}$  en exploitant l'action de  $\mathrm{GL}_3(\mathbf{K})$  par conjugaison sur  $\mathcal{N}$ .

1. Décrire les orbites de  $\mathrm{GL}_3(\mathbf{K})$  dans  $\mathcal{N}$ .

2. Pour chacune de ces orbites, expliciter le stabilisateur d'un élément bien choisi. En déduire le cardinal de chaque orbite.

3. En déduire le cardinal de  $\mathcal{N}$ .

**Exercice 3** (Décompte des symétries ; extrait d'examen) — Soit  $\mathbf{K}$  un corps fini de cardinal  $q$  et soit  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$  de dimension finie  $n \geq 1$ . Soit  $\mathbf{Gr}(V)$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $V$ , muni de l'action naturelle de  $\mathrm{GL}(V)$  :

$$\mathrm{GL}(V) \times \mathbf{Gr}(V) \rightarrow \mathbf{Gr}(V), \quad (g, W) \mapsto g(W).$$

Le but de cet exercice est de déterminer le cardinal de l'ensemble

$$X = \{u \in \mathrm{End}(V) \mid u^2 = \mathrm{id}\}.$$

On va distinguer deux cas :  $\mathrm{car}(\mathbf{K}) \neq 2$  et  $\mathrm{car}(\mathbf{K}) = 2$ .

1. Expliciter le cardinal  $\gamma_n(q)$  de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$  en fonction de  $n$  et de  $q$ .
2. Supposons tout d'abord que  $\mathbf{K}$  soit de caractéristique différente de 2.
  - (i) Démontrer que l'application

$$X \rightarrow \mathbf{Gr}(V)^2, \quad u \mapsto (\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}), \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}))$$

établit une bijection entre  $X$  et le sous-ensemble  $Y$  de  $\mathbf{Gr}(V)^2$  formés des couples de sous-espaces supplémentaires.

- (ii) Décrire les orbites de  $GL(V)$  agissant diagonalement sur  $Y$ .
- (iii) Démontrer l'identité

$$|X| = \sum_{d=0}^n \frac{\gamma_n(q)}{\gamma_d(q)\gamma_{n-d}(q)}.$$

3. Supposons maintenant que  $\mathbf{K}$  soit de caractéristique 2. On considère l'action naturelle de  $GL(V)$  sur  $X$  par conjugaison.
- (i) Vérifier que l'application

$$\pi : X \rightarrow \mathbf{Gr}(V), \quad u \mapsto \text{Ker}(u - \text{id})$$

est  $GL(V)$ -équivariante.

- (ii) Soit  $W \in \mathbf{Gr}(V)$  de dimension  $d$ . Démontrer que  $\pi^{-1}(W)$  est non vide si et seulement si  $2d \geq n$ , puis exprimer le cardinal de  $\pi^{-1}(W)$  en fonction de  $q$ ,  $n$  et  $d$ .
- (iii) Démontrer l'identité

$$|X| = \sum_{\frac{n}{2} \leq d \leq n} \frac{\gamma_n(q)}{q^{(n-d)(3d-n)}\gamma_{n-d}(q)\gamma_{2n-d}(q)}.$$

**Exercice 4** (Cardinal du groupe  $SO_2$  sur un corps fini) — Pour tout corps  $\mathbf{K}$  de caractéristique différente de 2, on note  $O_2(\mathbf{K})$  le groupe des isométries de la forme quadratique  $x^2 + y^2$  sur  $\mathbf{K}^2$  et on désigne par  $SO_2(\mathbf{K})$  le sous-groupe des éléments de déterminant 1.

1. Démontrer que  $SO_2(\mathbf{K})$  est l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , où  $a, b \in \mathbf{K}$  et  $a^2 + b^2 = 1$ .

(Indication : déterminer les conditions sur les colonnes d'une matrice  $2 \times 2$  pour qu'elle appartienne à  $SO_2(\mathbf{K})$ .)

Notons  $\mathcal{C}(\mathbf{K})$  l'ensemble des couples  $(a, b) \in \mathbf{K}^2$  tels que  $a^2 + b^2 = 1$ .

2. Supposons que  $-1$  ne soit pas un carré dans  $\mathbf{K}$ .

Démontrer que l'application

$$\pi : \mathbf{K} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{K}), \quad t \mapsto \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

est injective, et que son image est le complémentaire du point  $(-1, 0)$ .

(Indication : observer que le point  $\pi(t)$  appartient à la droite passant par  $(-1, 0)$  et de vecteur directeur  $t$ .)

3. Supposons maintenant que  $-1$  soit un carré dans  $\mathbf{K}$  et notons  $\pm i$  ses deux racines carrées dans  $\mathbf{K}$ .

Démontrer que la formule précédente définit une bijection entre  $\mathbf{K} - \{\pm i\}$  et le complémentaire du point  $(-1, 0)$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ .

4. Supposons que le corps  $\mathbf{K}$  soit fini, de cardinal  $q$ .

- (i) Démontrer que  $-1$  est un carré dans  $\mathbf{K}$  si et seulement si  $(-1)^{\frac{q-1}{2}} = 1$ .

(Indication : le groupe  $\mathbf{K}^\times$  est cyclique ; si  $\omega$  en est un générateur, les carrés sont les éléments de la forme  $\omega^{2a} \dots$ )

- (ii) Dédire de ce qui précède l'expression du cardinal de  $SO_2(\mathbf{K})$  en fonction de  $q$ .