Université Lyon 1 – 2016-2017
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 9 — Groupes de Lie

Exercice 1 (Exemples) — Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $\mathrm{U}(n)$ le groupe unitaire d'ordre n et H_n l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes d'ordre n. En utilisant l'application
$$f : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_n, \quad \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^*\mathrm{M},$$
démontrer que $\mathrm{U}(n)$ est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et déterminer son espace tangent en I_n.
2. Soit p et q deux entiers naturels tels que $p + q = n$ et notons $\mathrm{I}_{p,q}$ la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q)$. Soit
$$\mathrm{O}(p, q) = \{\mathrm{P} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \mid {}^t\mathrm{P}\ \mathrm{I}_{p,q}\ \mathrm{P} = \mathrm{I}_{p,q}\}.$$
En considérant l'application
$$f : \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{S}_n, \quad \mathrm{P} \longmapsto {}^t\mathrm{P}\ \mathrm{I}_{p,q}\ \mathrm{P},$$
démontrer que $\mathrm{O}(p, q)$ est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ et déterminer l'espace tangent en I_n. Démontrer que $\mathrm{SO}(p, q) = \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{SL}(n)$ est également une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, ayant le même espace tangent en I_n que $\mathrm{O}(p, q)$.

Exercice 2 (Le groupe spécial unitaire) — Il s'agit de démontrer que $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$ est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{R}^{2n^2}$.

1. Considérons l'application
$$\Phi : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_n \oplus \mathbf{C}, \quad \mathrm{X} \longmapsto (\mathrm{X}^* + \mathrm{X}, \mathrm{Tr}(\mathrm{X})).$$
Démontrer que l'image de Φ est le sous-espace vectoriel réel
$$\{(\mathrm{M}, \lambda) \in \mathrm{H}_n \oplus \mathbf{C} \mid \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 2\mathcal{R}e\ (\lambda)\}.$$
2. En déduire que l'application
$$\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_n \times \mathbf{C}^\times, \quad \mathrm{M} \longmapsto (\mathrm{M}^*\mathrm{M}, \det(\mathrm{M}))$$
n'est pas une submersion au point I_n.
3. Démontrer que l'image de φ est contenue dans le sous-ensemble
$$\mathrm{V} = \{(\mathrm{A}, z) \in \mathrm{H}_n \times \mathbf{C}^\times \mid \det(\mathrm{A}) = |z|^2\}.$$
4. Démontrer que l'application
$$f : \mathrm{H}_n \times \mathbf{C}^\times \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (\mathrm{A}, z) \longmapsto |z|^2 - \det(\mathrm{A})$$
est une submersion en tout point de V. En déduire que V est une sous-variété de $\mathrm{H}_n \times \mathbf{C}^\times$ et déterminer son espace tangent au point $(\mathrm{I}_n, 1)$.
5. Démontrer que l'application
$$\pi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{H}_n \times \mathbf{R}, \quad (\mathrm{A}, z) \longmapsto (\mathrm{A}, \mathcal{I}m\ (z))$$
réalise un difféomorphisme d'un voisinage de $(\mathrm{I}_n, 1)$ dans V sur un voisinage de $(\mathrm{I}_n, 0)$ dans $\mathrm{H}_n \times \mathbf{R}$.

6. Déduire de ce qui précède que $\mathrm{SU}(n)$ est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et déterminer son espace tangent au point I_n.

Exercice 3 (Deux points de vue sur les algèbres de Lie) — On désigne par $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, d'élément neutre $1 = \mathrm{I}_n$. On suppose que G est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ [1].

On rappelle que l'*espace tangent* à G en 1 est l'ensemble des vecteurs tangents au point 1 aux courbes $\mathcal{C}^1$ tracées sur G et passant par 1 :

$$\mathrm{T}_1\mathrm{G} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \mid \exists f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathrm{M}_n(\mathbf{K})),\ f(\mathbf{R}) \subset \mathrm{G}, f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = \mathrm{X}\}.$$

On pose par ailleurs :

$$\mathfrak{g} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K}) \mid \ \forall t \in \mathbf{R}, \ \ \exp(t\mathrm{X}) \in \mathrm{G}\}.$$

1. Vérifier que $\mathfrak{g} \subset \mathrm{T}_1\mathrm{G}$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathrm{G}$ une courbe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = \mathrm{X} \neq 0$.
   (i) Démontrer qu'il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{X}_m = \log f(\frac{1}{m})$ soit bien défini pour tout $m \geq m_0$.
   (ii) Démontrer que la suite $\left(\frac{\mathrm{X}_m}{||\mathrm{X}_m||}\right)$ converge vers $\mathrm{X}/||\mathrm{X}||$. (*Indication : calculer un développement limité de* $\frac{\mathrm{X}_m}{||\mathrm{X}_m||}$.)
   (iii) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, écrivons
   $$t = a_m||\mathrm{X}_m|| + b_m, \quad a_m \in \mathbf{Z}, \ \ 0 \leqslant b_m < ||\mathrm{X}_m||.$$
   Démontrer que l'on a
   $$\lim_{m\to\infty} \exp(a_m\mathrm{X}_m) \in \mathrm{G} \quad \text{et} \quad \lim_{m\to\infty} \exp\left(\frac{b_m\mathrm{X}_m}{||\mathrm{X}_m||}\right) = 1,$$
   puis en déduire que X appartient à $\mathfrak{g}$.
   — Conclure.
3. Dans les exemples du cours et des deux exercices précédents, reprendre la recherche de l'espace tangent en l'identité en utilisant l'exponentielle.

Exercice 4 ($\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SO}(3)$) — Soit $\mathfrak{su}_2$ l'espace des matrices de taille 2×2 anti hermitiennes et de trace nulle.

1. Vérifier que le déterminant est une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{su}_2$.
2. Vérifier que l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ induit une action de $\mathrm{SU}(2)$ sur $\mathfrak{su}_2$ qui préserve B.
3. En déduire un homomorphisme différentiable $\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$ dont l'image est contenue dans $\mathrm{SO}(3)$.
4. Démontrer que le noyau de π est $\{\pm \mathrm{I}_2\}$. En déduire que la différentielle de π en I_2 est un isomorphisme.
5. En déduire que l'on a une suite exacte courte
$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}(3) \longrightarrow 1.$$

1. C'est en fait automatique en vertu d'un théorème d'Élie Cartan