Correction du partiel GCG
11 / 04 / 2017

Exercice 1.

Action judicieuse : On fait agir G par conjugaison sur H, ce qui est bien défini car H est distingué, de plus, l'action est continue.

Soit $h \in H$ et $\mathcal{O}_h$ son orbite pour l'action. Alors, $\mathcal{O}_h$ est connexe, comme image de G connexe par l'application continue $g \longmapsto ghg^{-1}$. De plus, $\mathcal{O}_h \subset H$ discret. Donc $\mathcal{O}_h$ est réduit à un point, le point h. Conclusion, $ghg^{-1} = h$, $\forall g \in G$. Donc $h \in Z(G)$.

[Dans la correction, on identifiera une matrice A et son endomorphisme associé]

Exercice 2

1) Posons $A = (a_{kj})$, avec $a_{kj} \in \mathbb{C}$, $a_{kj} = Re(a_{kj}) + i\,Im(a_{kj})$.

Alors : $\varphi(e_j) = \sum_k a_{kj} e_k = \sum_k Re(a_{kj}) e_k + \sum_k Im(a_{kj})\, ie_k$

et $\varphi(ie_j) = i\varphi(e_j) = -\sum_k Im(a_{kj}) e_k + \sum_k Re(a_{kj})\, ie_k$

Ce qui prouve que la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} Re(A) & -Im(A) \\ Im(A) & Re(A) \end{pmatrix}$

2) f est clairement injectif et continu. Comme il représente l'application qui envoie $\varphi \in End(\mathbb{C}^n)$ sur $\varphi|_{\mathbb{R}^{2n}} \in End(\mathbb{R}^{2n})$, c'est clairement qu'il vérifie $f(\varphi \circ \psi) = f(\varphi) \circ f(\psi)$.

C'est donc bien un morphisme de groupes.

3) Soit $\psi \in GL_n(\mathbb{C})$ l'homothétie iI_n de rapport i.
Alors $f(\psi) = J$. Soit $\varphi \in GL_n(\mathbb{C})$, alors φ commute avec ψ, donc $f(\varphi)$ commute avec $f(\psi) = J$.

Inversement, soit $\bar{\varphi} \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ tq $\bar{\varphi} \circ \psi = \psi \circ \bar{\varphi}$.
Alors $\bar{\varphi}$ est un morphisme bijectif de $\mathbb{R}$-espace, qui commute avec J. Si l'on regarde $\bar{\varphi} = \varphi$ comme application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, alors $\varphi(iu) = \varphi(\psi(u)) = \psi(\varphi(u)) = i\varphi(u)$. Donc φ commute avec i, et il vient que φ est un morphisme bijectif de $\mathbb{C}$-espace. On a bien $f(\varphi) = \bar{\varphi}$.

4) Soit M semblable à J. Alors, il existe P dans $GL_{2n}(\mathbb{R})$ tq $M = PJP^{-1}$. Donc $M^2 = PJ^2P^{-1}$
$= P(-I_{2n})P^{-1} = -I_{2n} \Rightarrow M \in \mathcal{C}$.

Réciproquement, soit M dans $GL_{2n}(\mathbb{R})$ tq $M^2 = -I_{2n}$.
Alors M est annulé par le polynôme $Q = X^2 + 1$, qui est scindé simple sur $\mathbb{C}$. Donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. De plus, comme M est réelle, la multiplicité algébrique de i est égale à celle de $-i$ (car χ_M est réel).
Donc M est $\mathbb{C}$-semblable à $\mathrm{diag}(\underbrace{i, i, \dots, i}_{n \times}, \underbrace{-i, \dots, -i}_{n \times}) = D$.

Pour la même raison, J est $\mathbb{C}$-semblable à cette matrice diagonale D. Comme M et J sont réelles et $\mathbb{C}$-semblables, elles sont $\mathbb{R}$-semblables.

5) On fait agir par conjugaison le groupe $GL_{2n}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}$. D'après 4) $\mathcal{C}$ est l'orbite $\mathcal{O}_J$ de J. D'après le théorème d'homéomorphisme, on a un homéo : $GL_{2n}(\mathbb{R}) / \mathrm{Stab}_J \simeq \mathcal{O}_J$, avec Stab_J le stabilisateur de J.

3

Or, $\mathrm{Stab}_J = \{M,\ MJM^{-1} = J\} = \{M,\ MJ = JM\}$

$= f(GL_n(\mathbb{C}))$, que l'on a identifié à $GL_n(\mathbb{C})$!

par 3)

6) Un élément de $GL_n(\mathbb{C})$, identifié à $f(GL_n(\mathbb{C}))$, est de la forme $f(A)$ et donc son déterminant est >0.

D'où $GL_n(\mathbb{C}) \subset GL^+_{2n}(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $GL_{2n}(\mathbb{R}) / GL_n(\mathbb{C})$, c'est l'image de $GL_{2n}(\mathbb{R})$ par une application continue.

Or, $GL_{2n}(\mathbb{R})$ est la réunion disjointe de deux composantes connexes : $GL_{2n}(\mathbb{R})^+$ et $GL_{2n}(\mathbb{R})^-$. Donc, $\mathcal{C}$ possède au plus deux composantes connexe : c'est la réunion des deux connexes $\pi(GL_{2n}(\mathbb{R})^+)$ et $\pi(GL_{2n}(\mathbb{R})^-)$, où π désigne la projection canonique sur $GL_{2n}(\mathbb{R}) / GL_n(\mathbb{C})$.

Il reste à montrer que ces deux ouverts connexes sont disjoints. En effet, supposons $\bar{g} \in \pi(GL_{2n}(\mathbb{R})^+) \cap \pi(GL_{2n}(\mathbb{R})^-)$

Alors, il existe $g^+ \in GL_{2n}(\mathbb{R})^+$ et $g^- \in GL_{2n}(\mathbb{R})^-$ tq

$g^+ GL_n(\mathbb{C}) = g^- GL_n(\mathbb{C})$, c'est à dire $(g^-)^{-1} g^+ \in GL_n(\mathbb{C})$.

Or $(g^-)^{-1} g^+ \in GL_{2n}(\mathbb{R})^-$. Contradiction.

Exercice 3

1) Soit f une isométrie de G à G' et $\mathcal{B}$ une base de G. On pose $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$, qui est une base de G' car f est un isomorphisme. Par définition, on a bien $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q|_G) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q|_{G'})$.

Reciproquement, on suppose $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q|_G) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q|_{G'})$

Soit f le morphisme qui envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$. Alors f est un isomorphisme et il vérifie, par construction :

$$\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y) \text{ pour } x, y \text{ dans } \mathcal{B}.$$

Par linéarité, il verifie cette égalité pour tout x et y dans G, donc f est une isométrie.

2) On a $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ car q est non dégénérée. De plus, comme $q|_F$ est non dégénérée,

$$F \cap F^\perp = \{x \in F, \varphi(x,y) = 0 \ \forall y \in F\} = \mathrm{Ker}\, q|_F = 0.$$

On a donc $E = F \oplus F^\perp$.

De plus, $\mathrm{Ker}\, q|_{F^\perp} = \{y \in F^\perp, \varphi(y, x) = 0, \forall x \in F^\perp\}$
$= F^\perp \cap (F^\perp)^\perp = F^\perp \cap F = \{0\}$,

($F^{\perp\perp} = F$ car q non deg.)

Donc q est non dégénérée sur $F^\perp$.

3) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Comme $q|_F$ est non dégénérée et que f est une isométrie entre F et F', il vient que $q|_{F'}$ est également non dégénérée par 1). Comme $E = F \oplus F^\perp$, dans une base adaptée, la matrice de q est constituée de deux blocs diagonaux :

$$\mathrm{Mat}(q) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(q|_F) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}(q|_{F^\perp}) \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que $\mathrm{Mat}(q|_{F^\perp})$ est de rang $\dim F^\perp$, puisque $\mathrm{Mat}(q)$ est de rang $\dim E$ et $\mathrm{Mat}(q|_F)$ est de rang $\dim F$.

Par le théorème du cours, elle est congruente ~~à~~ à l'identité. De $\hat{m}$ pour $\mathrm{Mat}(q|_{F'^\perp})$. Donc, il existe une base $\mathcal{B}$ de $F^\perp$, resp. $\mathcal{B}'$ de $F'^\perp$, tq la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q|_{F^\perp}) = I_{\dim F^\perp} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q|_{F'^\perp})$$

Donc $F^\perp$ et $F'^\perp$ sont isométriques, par 1).

4) Soit S et S' deux matrices symétriques réelles de signatures respectives (r,s) et (r',s'). Alors, il est clair que la signature de $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix}$ est $(r+r', s+s')$.

En reprenant la preuve du 3) dans le cadre réel et en utilisant le fait que deux matrices symétriques réelles sont congruentes ssi elles ont même signature, on obtient que $F^\perp$ et $F'^\perp$ sont isométriques. ⑥

5) p a besoin d'être impair car toute la théorie des formes quadratiques demande $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.
On reprend encore une fois la preuve de 3), en se servant de.

a) Deux matrices de $\mathbb{F}_q$, (non dégénérées), sont congruentes ssi elles ont même ~~rang~~ discriminant.

b) $\mathrm{disc}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} = \mathrm{disc}(S)\,\mathrm{disc}(S')$.

6) Soit σ une isométrie de F vers F'.
On a vu qu'il existe σ' une isométrie de $F^\perp$ vers $F'^\perp$.
Donc $\begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(\sigma) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}(\sigma') \end{pmatrix}$ définit une isométrie de $F \oplus F^\perp = E$ vers $F' \oplus F'^\perp = E$, qui prolonge σ.

On a montré, pour les corps classiques $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_q$, le théorème de Witt (qui remplace, dans ce cadre, le théorème de la base incomplète).