Université Lyon 1 – 2017-2018
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 2 – Topologie des espaces de matrices, groupes topologiques

Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et on munit $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ de sa topologie de $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 (Sur les matrices de rang r) — Soit p, q deux entiers naturels non nuls. On considère une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ que l'on suppose de rang $r < \min\{p, q\}$ et on fixe un entier ρ tel que $r + 1 \leqslant \rho \leqslant \min\{p, q\}$.

Démontrer qu'il existe une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de matrices dans $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ qui converge vers A et telle que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}_n) = \rho$ pour tout n. (*Indication : commencer par examiner le cas où* A *est sous forme normale.*)

Exercice 2 (Topologie de l'espace des symétries) — Soit $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ formé des matrices S telles que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{I}_n$ (symétries). On considère les fonctions ρ_+ et ρ_- définies pas

$$\rho_\pm : \mathcal{S} \to \mathbf{N}, \quad \mathrm{S} \mapsto \mathrm{rg}\ (\mathrm{S} \pm \mathrm{I}_n).$$

1. Quel lien existe-t-il entre ρ_+ et ρ_- sur $\mathcal{S}$?
2. Démontrer que les fibres de ρ_+ et ρ_- sont des parties ouvertes et fermées de $\mathcal{S}$.
3. En considérant l'action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{S}$ par conjugaison, démontrer que les fibres de ρ_+ et ρ_- sont des parties connexes de $\mathcal{S}$.

Exercice 3 (Propriétés élémentaires des groupes topologiques [F1, F2]) — Soit G un groupe topologique.

1. Soit $g_0 \in \mathrm{G}$. Montrer que les applications $\mathrm{L}_{g_0} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $g \mapsto g_0 g$ et $\mathrm{R}_{g_0} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $g \mapsto g g_0$ sont des homéomorphismes.
2. Démontrer que si $\mathrm{U} \subset \mathrm{G}$ est un ouvert et $\mathrm{V} \subset \mathrm{G}$ est une partie quelconque, alors $\mathrm{U}^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in \mathrm{U}\}$ et $\mathrm{UV} = \{uv \mid u \in \mathrm{U}, v \in \mathrm{V}\}$ sont ouverts.
3. Démontrer que si U et V sont compacts alors UV est compact.

   En revanche, le produit de deux fermés n'est pas nécessairement fermé... Pouvz-vous donner un exemple de groupe et de parties fermées U et V telles que UV ne soit pas fermé ?

Exercice 4 (Voisinages [F3]) — Soit G un groupe topologique.

1. Démontrer que, lorsque V parcourt un système fondamental de voisinage de 1, les ensembles $\mathrm{V}g_0$, (resp. $g_0\mathrm{V}$) forment un système fondamental de voisinages de g_0.
2. Démontrer que l'application $f : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto g g_0 h^{-1}$ est continue. En déduire, lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages de 1, les ensembles $\mathrm{V}g_0\mathrm{V}^{-1}$ forment un système fondamental de voisinages du point g_0 de G.

Exercice 5 (Un extrait d'examen) — Soit G un groupe topologique connexe et soit H un sous-groupe distingué et discret de G. Démontrer que H est abélien. (*Indication : considérer l'action de* G *sur* H *par conjugaison et étudier la topologie des orbites.*)