

Fiche 3 – Groupes topologiques

Exercice 1 (Une observation importante) — Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe de G . Démontrer que, si H est ouvert, alors H est également fermé. Que peut-on en déduire sur H si G est connexe ?

Exercice 2 (Adhérence [F4]) — Soit G un groupe topologique. On désigne par \bar{A} l'adhérence de la partie A de G .

- (a) Soit U un voisinage de 1 et soit g, h dans G . Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ tel que $gVhV \subset ghU$.
- (b) En déduire que si g et h sont dans les adhérences \bar{A} et \bar{B} de parties A et B de G , alors $ghU \cap \bar{A}\bar{B} \neq \emptyset$.
- (c) Démontrer que $\bar{A} \cdot \bar{B} \subset \overline{AB}$.
2. Prouver l'égalité $\bar{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$.
3. Montrer que pour tout g, h dans G , $g\bar{A}h = \overline{gAh}$.
4. On suppose que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $A \times B$. En considérant l'application $f : G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$, prouver que $ab = ba$ pour tout couple (a, b) de $\bar{A} \times \bar{B}$.
5. Démontrer que l'adhérence d'un sous groupe H de G est un sous groupe de G , puis que \bar{H} est abélien si et seulement si H l'est.

Exercice 3 (Adhérence d'une orbite [F5]) Soit G un groupe topologique agissant continûment sur un espace topologique X .

1. Soit g dans G . Montrer que l'action de g est un homéomorphisme de X .
2. Soit \mathcal{O} une orbite et $\bar{\mathcal{O}}$ son adhérence. Montrer que $g \cdot \bar{\mathcal{O}} = \overline{g \cdot \mathcal{O}} = \bar{\mathcal{O}}$.
3. En déduire que l'action de G sur X induit une action de G sur $\bar{\mathcal{O}}$, puis que $\bar{\mathcal{O}}$ est une réunion d'orbites pour G .

Exercice 4 (Composante neutre [F8, F9]) — Soit G un groupe topologique. On désigne par G° la composante connexe de 1.

1. Démontrer que G° est fermée (*indication : vérifier que l'adhérence de G° est connexe...*).
2. Démontrer que G° est stable par conjugaison.
3. Pour tout $g \in G$, démontrer que gG° est la composante connexe de g .
4. Démontrer que si H est un sous-groupe ouvert inclus dans G° , alors $H = G^\circ$.
5. Démontrer que si G est connexe, alors tout voisinage V de 1 engendre G , i.e.

$$G = \bigcup_{n \geq 1} V^n.$$

(*Indication : observer que l'on peut restreindre V de sorte que $V^{-1} = V$*).

6. Démontrer que G° est ouvert si et seulement si 1 a un voisinage connexe dans G .
7. On considère le sous-groupe \mathbf{Q} de \mathbf{R} muni de la topologie métrique induite.
 - (a) Démontrer que \mathbf{Q} n'est pas discret.
 - (b) Démontrer que la composante neutre de \mathbf{Q} est $\{0\}$ (cet exemple montre que G° n'est en général pas ouverte).

Exercice 5 (Sous-groupes additifs de \mathbf{R} [F14, F15, F20]) —

1. Soit H un sous-groupe non trivial de \mathbf{R} .
 - (a) Justifier l'existence de la borne inférieure a de $H \cap \mathbf{R}_{>0}$.
 - (b) Démontrer que si a est non nul, alors $H = a\mathbf{Z}$.
 - (c) Démontrer que si a est nul, alors H est dense dans \mathbf{R} .
 - (d) En déduire que tout sous-groupe de \mathbf{R} est soit cyclique, soit dense.
2. Soit α un nombre réel et soit $H = \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.
 - (a) Supposons que α soit rationnel et écrivons $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Démontrer que H est le groupe $\frac{1}{q}\mathbf{Z}$.
 - (b) Démontrer que, si α est irrationnel, alors H est dense dans \mathbf{R} .
 - (c) En déduire que tout élément de $[-1, 1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n \in \mathbf{N}}$ (*indication* : on pourra utiliser, en le justifiant, le fait que l'image d'une partie dense par une application continue *surjective* est encore dense).
3. Soit G le groupe quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, muni de la topologie quotient ; on note $\pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow G$ la projection canonique. Fixons un nombre irrationnel ϑ . On note H_0 le sous-groupe de \mathbf{R}^2 formé des couples (x, y) tels que $y = \vartheta x$, H son image par la projection π et \tilde{H} la saturation de H_0 , c'est-à-dire :

$$\tilde{H} = \pi^{-1}(\pi(H_0)).$$

- (a) Démontrer que \tilde{H} est dense dans \mathbf{R}^2 et en déduire que H est dense dans G .
 - (b) Le groupe quotient G/H est-il séparé ?
4. Prouver que, pour tout n , le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ contient exactement un sous-groupe fini de cardinal n et que ses sous-groupes infinis sont denses.
5. On considère le sous-groupe \mathbb{Q} de \mathbb{R} muni de la topologie métrique induite.
 - (a) Montrer (le résultat bien connu) que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .
 - (b) Montrer que la composante connexe de l'élément neutre 0 est $\{0\}$.

Exercice 6 (Groupes classiques compacts [F24]) —

1. Soit $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Démontrer que les groupes topologiques $U(n)$, $O(n)$, $SU(n)$ et $SO(n)$ sont compacts.
2. On définit le groupe symplectique complexe comme le stabilisateur d'une forme bilinéaire anti-symétrique non dégénérée :

$$\text{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \{A \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^t A J_n A = J_n\} \text{ où } J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\text{Sp}(n, \mathbb{R}) = \text{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \cap U(n)$ le groupe symplectique compact. Prouver que le groupe symplectique compact est bien compact.