Université Lyon 1 – 2017-2018
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 5 — Réduction des endomorphismes

Exercice 1 (Similitude : de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$) — Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. On se propose de démontrer que A et B sont semblables sur $\mathbf{C}$ si et seulement si elles le sont sur $\mathbf{R}$. La condition est évidemment suffisante. Supposons que A et B soient semblables sur $\mathbf{C}$: il existe donc une matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathrm{B} = \mathrm{PAP}^{-1}$.

1. Écrivons $\mathrm{P} = \mathrm{U} + i\mathrm{V}$ avec $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que la matrice réelle $\mathrm{Q}_t = \mathrm{U} + t\mathrm{V}$ soit inversible. (*Indication : considérer le polynôme* $\det(\mathrm{U} + z\mathrm{V})$)
2. Si t est comme précédemment, vérifier que l'on a alors $\mathrm{B} = \mathrm{Q}_t \mathrm{A} \mathrm{Q}_t^{-1}$.

Exercice 2 (Classes de similitude) — 1. Démontrer que deux matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sont sembables si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{rg}\ (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)^k = \mathrm{rg}\ (\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_n)^k.$$

(*Indication : utiliser le lemme des noyaux et la réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents.*)

2. Fixons maintenant un polynôme $\chi \in \mathrm{C}[\mathrm{T}]$ unitaire et de degré n. On désigne par $\mathrm{M}_\mathrm{n}^\chi$ l'ensemble des matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ de polynôme caractéristique $(-1)^n\chi$.

(i) Décrire les orbites pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ sur M_n^χ. Combien y en a-t-il ?

(ii) Démontrer que l'adhérence de $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ contient toujours une matrice diagonale. (*Indication : utiliser la réduction de Jordan.*)

(iii) Supposons que A soit diagonalisable. Démontrer qu'une matrice B appartient à l'adhérence de $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ si et seulement si A et B ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal.

(iv) Déduire des deux questions précédentes que A est diagonalisable si et seulement si l'orbite $\mathcal{O}_\mathrm{A}$ est fermée.

Exercice 3 (Matrices nilpotentes) — 1. Démontrer que toutes les matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_8(\mathbf{K})$ telles que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}(\mathrm{A})$ sont semblables. (*Indications : observer que ces matrices sont nilpotentes...*)

2. Soit $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente.
   (i) Décrire la forme normale de Jordan de N^2 à partir de celle de N.
   (ii) En déduire une caractérisation des classes de conjugaison de matrices nilpotentes admettant une « racine carrée ».

Exercice 4 (La réduction au secours des polynômes : borne de Cauchy [D7]) — Soit $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ un polynôme unitaire de degré n dans $\mathbb{C}[X]$. On pose

$$R = \mathrm{Max}\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que si λ est une racine de P, alors $\lambda \leq R$.

1. On rappelle la matrice compagnon C_P donnée par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que son polynôme caractéristique est $(-1)^n P$. En déduire que toute racine de P est valeur propre de C_P.

2. Soit λ une racine de P, donc une valeur propre de C_P, et soit $v = (v_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ. Montrer, en considérant $\mathrm{Max}_i\{|v_i|\}$ que $|\lambda| \leq R$.

Exercice 5 (Disques de Gershgorin [D8])— Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère, pour tout i de 1 à n, le disque $\mathcal{D}_i \subset \mathbb{C}$, de centre a_{ii} de rayon $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Soit λ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe k tel que λ est dans $\mathcal{D}_k$. Autrement-dit, le spectre de la matrice A est inclus dans $\bigcup_i \mathcal{D}_i$.

Exercice 6 (Spectre d'un polynm̂e en une matrice [D2])— Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On veut montrer que les valeurs propres de $P(A)$ sont les $P(\lambda)$, où λ parcourt l'ensemble des valeurs propres de A.

1. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$.
2. Réciproquement, soit μ une valeur propre de $P(A)$, montrer que $\mu = P(\lambda)$ pour une valeur propre λ de A.
3. Donner une méthode abusément plus courte en trigonalisant la matrice A.

Exercice 7 (Théorème de Kronecker [D9])— Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires P de $\mathbb{Z}[X]$ tels que toute racine (complexe) z de P est de module $|z| \leq 1$. Le but de l'exercice est de montrer que si $P(z) = 0$, avec $P \in \mathcal{P}$, alors soit z est nul, soit z est une racine de l'unité [1].

1. Soit $n > 0$. On suppose P dans $\mathcal{P}_n$, l'ensemble des polynômes de $\mathcal{P}$ de degré n. Montrer que le coefficient a_k de X^k vérifie $|a_k| \leq \binom{n}{k}$.
2. En déduire que $\mathcal{P}_n$ est fini.
   Soit $\mathcal{R}_n$ l'ensemble (fini, donc) des racines des polynômes de $\mathcal{P}_n$.
3. Soit P dans $\mathcal{P}_n$ et C_P la matrice compagnon de P. Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que le polynôme caractéristique $\chi_{C_P^m}$, de la puissance m-ième C_P^m, est encore dans $\mathcal{P}_n$ pour tout m de $\mathbf{N}$.
4. En déduire que $z \in \mathcal{R}_n$ implique $z^m \in \mathcal{R}_n$ pour tout m. Puis, conclure que soit z est nul, soit z est une racine de l'unité.

Exercice 8 (Commutant d'une matrice de Jordan [D10])— On rappelle que J_n est la matrice de Jordan (nilpotente) indécomposable $n \times n$. Soit A une matrice qui commute à J_n. Soit (e_i) la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

1. Remarquer que $J_n^k e_1 = e_{1+k}$ pour k de 0 à $n-1$. En déduire que Ae_1 peut s'écrire $P(J_n)e_1$, où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.
2. Montrer que $Ae_i = P(J_n)e_i$ pour tout i.
3. Montrer que le commutant de J_n est égal au sous-espace des polynômes en cette matrice.
4. Quel est le nombre de matrices nilpotentes de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ et de rang $n-1$?

Exercice 9 (Adhérence de l'ensemble des matrices réelles diagonalisables [D24])—

1. Trouver une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas dans l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables.
2. Soit (D_k) une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ qui converge vers A : montrer que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que toute matrice trigonalisable sur $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
4. Conclure : l'adhérence de l'ensemble des matrices réelles diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables.

---

1. On peut voir alors que $\mathcal{P}$ est la partie multiplicative engendrée par X et les polynômes cyclotomiques.