

Fiche 6 — Formes quadratiques

Exercice 1 (Critère de Sylvester pour les matrices symétriques définies positives. [D3]). Soit A une matrice carrée réelle symétrique de taille n . Pour tout k de 1 à n , on appelle mineur principal Δ_k de A le mineur correspondant aux k premières lignes et aux k premières colonnes de la matrice A .

1. Si A est définie positive, montrer que ses mineurs principaux sont tous strictement positifs.
2. Montrer réciproquement que si tous les mineurs principaux sont strictement positifs, alors la matrice A est définie positive.

Exercice 2 (Produit de matrices symétriques 1. [D4]). Soit A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, avec A inversible. On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique (\cdot, \cdot) . On notera $\langle X, Y \rangle_A = (AX, Y)$, resp. $\langle X, Y \rangle_B = (BX, Y)$, la forme bilinéaire symétrique associée canoniquement à A , resp. B .

1. Montrer que $A^{-1}B$ est autoadjointe pour la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$, i.e. montrer que $\langle A^{-1}BX, Y \rangle_A = \langle X, A^{-1}BY \rangle_A$.
2. On suppose que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ possèdent une base commune d'orthogonalisation. Montrer que $A^{-1}B$ est diagonalisable.
3. Réciproquement, on suppose que $A^{-1}B$ est diagonalisable sur \mathbb{R} et que B est inversible. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ possèdent une base commune d'orthogonalisation.
4. On suppose $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1}B$ est diagonalisable sur \mathbb{R} .

Exercice 3 (Produit de matrices symétriques 2. [D6]). Soit A, B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe P inversible et D diagonale positive telle que $A = {}^t P P$ et $B = {}^t P D P$. En déduire que AB est diagonalisable à valeurs propres positives.

Exercice 4 (Dual de l'algèbre des matrices. [D9]). Soit \mathbf{K} un corps, n un entier positif, et φ une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées de taille n .

1. Montrer que la forme qui envoie (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sur $\text{tr}(AB)$ est bilinéaire, symétrique et non dégénérée.
2. Soit φ une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que

$$\varphi(X) = \text{tr}(AX),$$

pour toute matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

3. Application 1 : Montrer que si de plus φ vérifie $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ pour tout X, Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors $\varphi = \lambda \text{tr}$ pour un λ dans \mathbf{K} .
4. Application 2 : Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice 5 (Formes quadratiques liées à la trace. [D11]).

1. Montrer que la forme $\text{tr}({}^t AB)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe compact.
2. Montrer que $A \mapsto \text{tr}(A^2)$ définit une forme quadratique sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, où \mathbf{K} est de caractéristique différente de 2.
3. On étudie sa restriction au sous-espace des matrices symétriques, puis au sous-espace des matrices antisymétriques. Montrer que ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour la forme quadratique.
4. On pose ici $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. Montrer que la signature de cette forme quadratique est $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$.
5. Montrer que si S est une matrice symétrique de signature (p, q) , alors $A \mapsto \text{tr}({}^t ASA)$ est de signature (np, nq) .

Exercice 6 (Adhérence des orbites de congruence. [D12]).

Nous avons vu que l'adhérence d'une orbite de congruence réelle est de la forme $\bigcup_{\substack{0 \leq h \leq p \\ 0 \leq k \leq q}} \text{Orb}(I_{(p-h, q-k)})$.

Ce résultat repose essentiellement sur le fait que cette réunion est un fermé. Le but de l'exercice est de fournir une méthode alternative pour prouver cette assertion.

1. Montrer que l'application σ , de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans l'espace topologique quotient $\mathbb{R}^n/\mathfrak{S}_n$, qui envoie une matrice S sur son spectre, est une application continue.
2. En déduire que $\bigcup_{\substack{0 \leq h \leq p \\ 0 \leq k \leq q}} \text{Orb}(I_{(p-h, q-k)})$ est fermé.

Exercice 7 (Connexité des classes de congruences de matrices symétriques réelles. [D14]).

Soit n un entier naturel non nul. Étant donné deux entiers p et q , on a noté $\mathcal{O}_{p,q}$ la partie de \mathcal{S}_n formée des matrices de signature (p, q) : ce sont les orbites pour l'action par congruence de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que le groupe $\text{GL}_n(\mathbb{R})^+$ des matrices de déterminant strictement positif est connexe.

1. On fait agir le groupe $\text{GL}_n(\mathbb{R})^+$ sur \mathcal{S}_n par congruence : pour $g \in \text{GL}_n(\mathbb{R})^+$ et $A \in \mathcal{S}_n$, l'action de g sur A est donnée par $g \cdot A = g A^t g$. Montrer que les orbites de cette action sont les parties $\mathcal{O}_{p,q}$, où (p, q) est un couple d'entiers naturels tels que $p + q \leq n$.
2. En déduire que pour tout couple (p, q) , l'orbite $\mathcal{O}_{p,q}$ est connexe.
3. Soit \mathcal{S}_n^\times l'ensemble des matrices symétriques inversibles. Montrer que les composantes connexes de \mathcal{S}_n^\times sont les $\mathcal{O}_{p,q}$, où (p, q) parcourt l'ensemble des couples tels que $p + q = n$.

Exercice 8 (Continuité de l'orthogonal- [D15, D16, D18]). Montrer que les applications sont continues pour la topologie des grassmanniennes réelles.

1. Soit \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne et k un entier, $0 \leq k \leq n$. On considère l'application $\perp: \text{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Gr}_{n-k,n}(\mathbb{R})$ qui à un sous-espace F de dimension k associe son orthogonal.
2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et k un entier, $0 \leq k \leq n$. On considère l'application $\perp: \text{Gr}_k(E) \rightarrow \text{Gr}_{n-k}(E^*)$ qui à un sous-espace F de dimension k de E associe son orthogonal dans le dual E^* .
3. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur \mathbb{R}^n . On considère l'application $\perp: \text{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Gr}_{n-k,n}(\mathbb{R})$ qui à un sous-espace F de dimension k associe son orthogonal F^\perp pour q .

Exercice 9 (Produits scalaires du plan [D30]).

Soit \mathcal{S}_2^{++} l'ensemble des matrices réelles 2×2 symétriques définies positives.

1. À un élément $z = (x, y)$ du demi-plan de Poincaré

$$\mathcal{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{+*}\},$$

on associe le produit scalaire $f(z) \in \mathcal{S}_2^{++}$ pour lequel $((1, 0), (x, y))$ est une base orthonormée. Dessiner l'image de f .

2. On fait agir \mathbb{R}_+^* par multiplication sur \mathcal{S}_2^{++} et on munit $\mathcal{S}_2^{++}/\mathbb{R}_+^*$ de la topologie quotient. Montrer que la composée de f et de la projection canonique est un homéomorphisme de \mathcal{H} sur $\mathcal{S}_2^{++}/\mathbb{R}_+^*$. Décrire sa réciproque.
3. Établir un lien direct entre $\mathcal{S}_2^{++}/\mathbb{R}_+^*$ et l'espace des structures complexes \mathcal{C} .