Université Lyon 1 – 2017-2018
Master 1 – Groupes classiques et géométrie

Fiche 7 — Décomposition polaire

Exercice 1 (Formes normales des endomorphismes orthogonaux, symétriques et antisymétriques [D34]) — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

1. Démontrer que tout endomorphisme de E admet un sous-espace invariant $\mathrm{W} \subset \mathrm{E}$ avec $\dim \mathrm{W} \leq 2$. (On pourra raisonner matriciellement et considérer les parties réelle et imaginaire d'un vecteur propre sur $\mathbf{C}$.)
2. Soit f un endomorphisme de E tel que, pour tout sous-espace V de E,
$$f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V} \Longrightarrow f(\mathrm{V}^\perp) \subset \mathrm{V}^\perp.$$
Démontrer qu'il existe une décomposition orthogonale $\mathrm{E} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathrm{W}_i$ en sous-espaces f-invariants W_i avec $\dim \mathrm{W}_i \leq 2$. (Raisonner par récurrence sur $\dim \mathrm{E}$.)
3. Montrer que si g est un endomorphisme de E et V un sous-espace de E stable par g, alors, $V^\perp$ est stable par l'adjoint g^* de g. En déduire que les endomorphismes symétriques, antisymétriques et orthogonaux, vérifient la propriété étudiée.
4. En déduire que
   (a) tout endomorphisme symétrique est $\mathrm{O}(n)$-diagonalisable,
   (b) la matrice de tout endomorphisme orthogonal est $\mathrm{O}(n)$-semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_+} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n_-} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \mathrm{R}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{R}_r \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \mathrm{R}_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}, \ \vartheta_i \in \mathbf{R},$$
   (c) la matrice de tout endomorphisme antisymétrique est $\mathrm{O}(n)$-semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{A}_r \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & \vartheta_i \\ -\vartheta_i & 0 \end{pmatrix}, \ \vartheta_i \in \mathbf{R}.$$

Exercice 2 (Exponentielle réelle) — On désigne par $\mathrm{A}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices antisymétriques.

1. Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, démontrer que le spectre de $\exp(\mathrm{A})$ est $\{e^\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\}$.
2. En déduire que la matrice $\mathrm{M}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle (*indication : sinon, voir que* M_0 *serait diagonalisable sur* $\mathbf{C}$).
3. Démontrer l'identité
$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta \\ \vartheta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$
pour tout $\vartheta \in \mathbf{R}$.

4. À l'aide de l'exercice précédent, en déduire que l'exponentielle induit par restriction une application surjective
$$\exp : \mathrm{A}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{SO}(n).$$
5. Démontrer que toute matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})_+$ s'écrit comme le produit de deux exponentielles réelles.

Exercice 3 (La décomposition polaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ [B3]) –

1. Montrer que, pour tout A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique $H \in \mathcal{H}_n^{++}$ telle que $H^2 = A^*A$.
2. Montrer que $U := AH^{-1} \in U(n)$ et en déduire que, pour tout A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $(H, U) \in \mathcal{H}_n^{++} \times U(n)$ tel que $A = UH$.
3. Montrer que la réciproque de la multiplication est continue.
4. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Exercice 4 (Des matrices réelles $U(n)$-semblables sont $O(n)$-semblables [B7]) –
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in U(n)$ telles que $A = UBU^*$. On veut montrer que A et B sont $O(n)$-semblables.

1. Soit $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $X + iY = U$. Montrer qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $X + \eta Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $P := X + \eta Y$.
2. Montrer que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P{}^tBP^{-1}$. En déduire que B commute avec ${}^tPP$.
3. Soit $P = VR$ la décomposition polaire de P, avec $V \in \mathrm{O}(n)$ et $R \in \mathcal{S}_n^{++}$. Montrer que B commute avec R. En déduire que A et B sont $\mathrm{O}(n)$-semblables.

Exercice 5 (Connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$) – Donner, en vous servant de la décomposition polaire, une preuve de la connexité du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$.

Exercice 6 (Une matrice orthogonale dans tout hyperplan) – Montrer, en utilisant la décomposition polaire, que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.

Exercice 7 (Image de l'exponentielle, cas réel) –

1. Montrer que si A est l'image $\exp(B)$ d'une matrice réelle B, alors A est le carré d'une matrice réelle.
2. Montrer la réciproque : l'image de l'exponentielle réelle est égale à l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $M \mapsto M^2$.

Exercice 8 (Maximalité du groupe orthogonal parmi les groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$) — Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant $\mathrm{O}(n)$. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{G}$.

1. Soit $\mathrm{A} = \mathrm{OS}$ la décomposition polaire de A, i.e. $\mathrm{O} \in \mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{S} \in \mathrm{S}_n^{++}$. Démontrer que :
$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \mathrm{S}^k \in \mathrm{G}.$$
2. En déduire que 1 est l'unique valeur propre de S (*Indication : introduire une norme sur $\mathbf{R}^n$ et la norme subordonnée sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, puis démontrer que chaque valeur propre de* S *engendre un sous-groupe borné de $\mathbf{R}_+^*$*).
3. En déduire $\mathrm{G} = \mathrm{O}(n)$.

Exercice 9 (Réduction des endomorphismes hermitiens) — Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien $(\cdot \mid \cdot)$. Soit $f \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$ un endomorphisme auto-adjoint :
$$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

1. Démontrer qu'il existe une droite W dans E telle que $f(\mathrm{W}) \subset \mathrm{W}$ et $f(\mathrm{W}^\perp) \subset \mathrm{W}^\perp$.

2. En déduire que toute matrice hermitienne est $\mathrm{U}(n)$-diagonalisable.

Soit H_n (resp. H_n^{++}) le sous-ensemble de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ formé des matrices hermitiennes (resp. hermitiennes définies positives).

3. En adaptant la preuve du cours pour les matrices symétriques réelles, démontrer que l'exponentielle induit un homéomorphisme entre H_n et H_n^{++}.
4. En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbf{Z}$, l'application $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{H}^k$ réalise un homéomorphisme de H_n^{++} sur lui-même.

Exercice 10 (Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$) — D'après l'exercice précédent, l'application exponentielle réalise un homéomorphisme de H_n sur H_n^{++}. On désigne par $\ell : \mathrm{H}_n^{++} \to \mathrm{H}_n$ l'homéomorphisme réciproque.

1. Démontrer que les applications
$$\mathrm{U}(n) \times \mathrm{H}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), \quad (\mathrm{U}, \mathrm{H}) \longmapsto \mathrm{UH}$$
et
$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{U}(n) \times \mathrm{H}_n, \quad \mathrm{M} \longmapsto \left(\mathrm{M}e^{-\frac{1}{2}\ell({}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M})}, \frac{1}{2}\ell({}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M})\right)$$
sont des homéomorphismes bien définis et réciproques l'un de l'autre.
2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{U}(n) \times \mathbf{R}^{n^2}$.
3. En adaptant le raisonnement de l'exercice 3, démontrer que $\mathrm{U}(n)$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.