Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1

Groupes Classiques et Géométrie

PARTIEL

10 Avril 2018

Durée : 2h

Exercice 1 Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{C}^2$, on pose

$$m(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

et on note $\mathbb{H} := \{m(a,b),\ a,b \in \mathbb{C}^2\} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ l'algèbre dite, des *quaternions*. On pourra admettre dans la suite que $\mathbb{H}$ est bien une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$.

Notons $1, i, j, k$ les images par m de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ identifiée à $\mathbb{C}^2$. Autrement-dit,

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ sera identifié à $m(z,0) \in \mathbb{H}$. Par exemple, 1 est identifié à la matrice identité. On admettra sans le justifier les égalités suivantes: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$.

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{C}$, et que $(1, j)$ en est une base.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $zj = j\bar{z}$.

   On définit la *conjugaison* sur $\mathbb{H}$ par

   $$\iota : a + bi + cj + dk \mapsto a - bi - cj - dk,$$

   où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que vue comme une matrice, pour tout élément $h \in \mathbb{H}$, on a $\iota(h) = h^*$, où h^* désigne la transposée de la conjuguée.

4. Déduire que $\iota(h_1 h_2) = \iota(h_2)\iota(h_1)$ pour tout $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$.

   On pose maintenant $||h||^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ pour tout $h := x + yi + zj + tk \in \mathbb{H}$, $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

5. Montrer que $h\iota(h) = \iota(h)h = ||h||^2$ pour tout $h \in \mathbb{H}$.

6. En déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.
7. Déduire également que $||h_1|| \cdot ||h_2|| = ||h_1 h_2||$ pour tous $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$.
8. Montrer que la sphère unité $\{h \in \mathbb{H}, ||h|| = 1\}$ muni de la multiplication de $\mathbb{H}$ et la topologie induite est isomorphe à $\mathrm{SU}(2)$ comme groupes topologiques.
9. Montrer que pour tous h_1, h_2 dans la sphère unité de $\mathbb{H}$, l'application

$$\begin{aligned} \phi_{h_1,h_2} : \mathbb{H} &\to \mathbb{H} \\ h &\mapsto h_1 h h_2^{-1} \end{aligned}$$

   est dans $\mathrm{SO}(4) = \mathrm{SO}(\mathbb{H}, ||\cdot||)$ le groupe des isométries orientées.
10. On obtient ainsi une application

$$\phi : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4),$$

   montrer que c'est un morphisme des groupes topologiques.
11. Calculer le noyau de ϕ.

On peut montrer que cette application est surjective. On obtient ainsi le revêtement universel (en effet double) de $\mathrm{SO}(4)$*, i.e. le quatrième groupe de spin, est isomorphe à* $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$.

Exercice 2 On note $\mathcal{S}_n$ le sous-espace des matrices symétriques réelles de taille n et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer que le complémentaire de $\mathcal{S}_n^{++}$ dans $\mathcal{S}_n$ est constitué des matrices symétriques S telles qu'il existe un vecteur colonne X vérifiant

$$^tXX = 1, \ ^tXSX \leq 0.$$

2. En déduire, en utilisant des suites, et grâce à la compacité de la sphère, que $\mathcal{S}_n^{++}$ est ouvert dans $\mathcal{S}_n$, pour la topologie normique des espaces réels.
3. *(Question de cours)* A une matrice symétrique S, on associe la forme quadratique q_S dont la matrice est S dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si une matrice réelle S est de signature (r, s), alors

$$r = \mathrm{Max}\{\dim(F), \, q_S \text{ est définie positive sur } F\}.$$

4. On note $\mathcal{S}_{+,\geq r}$ l'ensemble des matrices symétriques de signature (r', s') telles que $r' \geq r$. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{S}_{+,\geq r}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n$.

   On pourra considérer l'application (continue) qui envoie une forme quadratique sur sa restriction à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 Soit q la puissance d'un nombre premier impair.

1. Soit a, b, c dans $\mathbb{F}_q^*$. Montrer que l'équation $ax^2+by^2 = c$ admet au moins une solution dans $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \setminus \{(0,0)\}$.
2. En déduire que toute forme quadratique, sur un espace vectoriel E de dimension $n \geq 3$ sur le corps $\mathbb{F}_q$, est isotrope, *i.e.* possède un vecteur non nul qui l'annule.
3. On fixe un élément ζ de $\mathbb{F}_q$ qui n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{F}_q$. Montrer que les formes non isotropes en dimension 2 peuvent s'écrire $\mathrm{diag}(1, -\zeta)$ dans une base.
4. On fixe une forme quadratique Q non dégénérée sur l'espace vectoriel E de dimension n. On dit qu'un sous-espace H de E est un sous-espace hyperbolique s'il est de dimension 2, et peut être muni d'une base (e, f) telle que la matrice de Q dans cette base est
$$\mathrm{Mat}_{(e,f)}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quel est le discriminant d'une forme quadratique sur un sous-espace hyperbolique? Sur une somme directe de sous-espaces hyperboliques deux à deux Q-orthogonaux?
   (a) On suppose dans cette question que n est impair. Montrer que E se décompose en une somme directe de $k := \frac{n-1}{2}$ sous-espaces hyperboliques $H_1, \cdots, H_k$ et d'une droite D tous deux à deux Q-orthogonaux.
   On pourra noter δ le discriminant de Q, puis, utiliser le critère du cours qui assure que deux matrices soient congruentes inversibles soient congruentes.
   (b) On suppose dans cette question que n est pair. Montrer que E se décompose en une somme directe de $k := \frac{n-2}{2}$ sous-espaces hyperboliques $H_1, \cdots, H_k$ et d'un plan P tous deux à deux Q-orthogonaux. Le plan P est-il nécessairement hyperbolique, argumentez votre réponse.
   Même méthode que précédemment, on pourra mettre le dernier bloc matriciel sous la forme $\mathrm{diag}(1, a)$, *où a est à déterminer en fonction de n et δ.*