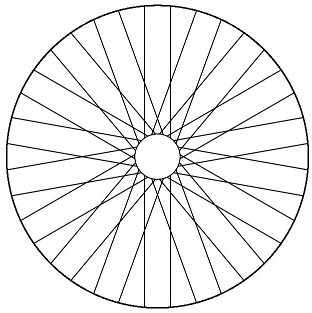
Année 2024-2025

Mathématiques L3 (S6). Géométrie.

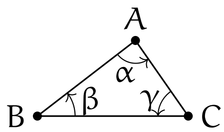
Exercice 1. Soit ABC un triangle dans le plan, S_A, S_B et S_C — les symétries par rapport aux points A, B et C respectivement. Trouver la composition $S_C \circ S_B \circ S_A \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.

Exercice 2*. Soient r le rayon du moyeu et R le rayon de la jante d'une roue de vélo. Le nombre de rayons est $2N$ et le nombre de rayon intersectés par chaque rayon est k. Trouver la longueur des rayons.



Exercice 3.

a. Notons R_A^α la rotation du plan à l'angle α autour du point A. Soit ABC un triangle dans le plan avec les angles respectifs α, β et γ. Trouver la composition
$$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} \circ R_C^{2\gamma}.$$



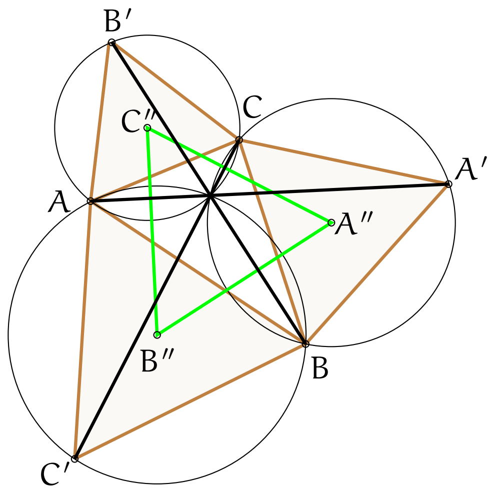
b. Notons H_A^a l'homothétie avec le centre A et le rapport a. Montrer que si la composition de trois homothéties est l'identité
$$H_A^a \circ H_B^b \circ H_C^c = \mathrm{id},$$
alors leurs centres A, B et C sont alignés.

Exercice 4. Soit ABC, un triangle $A'BC$, $AB'C$ et ABC' triangles équilatérales disjoints de ABC.

a. *Théorème de Toricelli.* Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ de même longueur et de l'angle $\pi/3$ entre eux.

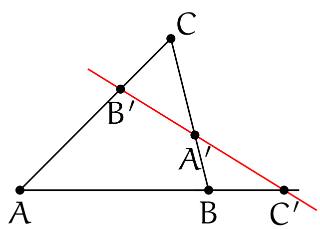
b. Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ et les cercles circonscrits des triangles équilatérals ont un point commun.

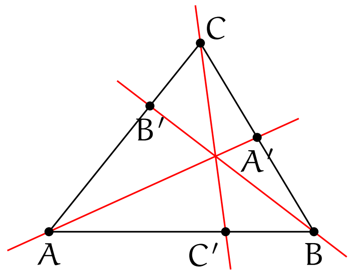
c. *Théorème de Napoleon.* Let A'', B'' et C'' sont les centres des triangles équilatérals respectifs. Montrer que le triangle $A''B''C''$ est équilatéral.



Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Existe-t-il un quadrilatère $A'B'C'D'$ circonscrit autour de $ABCD$ tel que les points A, B, C, D sont les milieux des côtés respectifs de $A'B'C'D'$? La même question pour un pentagone.

Exercice 6. *Théorème de Ménélaüs.* Soit ABC un triangle et A', B' et C' sont des points sur les droites BC, CA et AB, respectivement. Montrer que les points A',B' et C' sont colinéaires si et seulement si
$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{C'A}} = 1$$

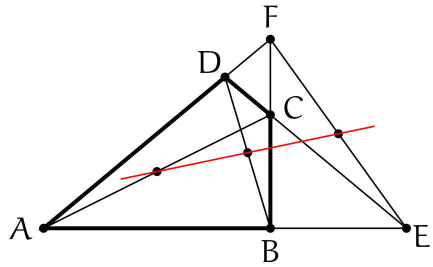




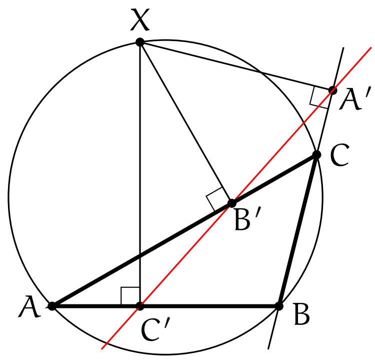
Exercice 7. *Théorème de Ceva.* Soit ABC un triangle et A', B' et C' sont des points sur les droites BC, CA et AB, respectivement. Montrer que les droites AA',BB' et CC' sont concourants si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC'}}\frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BA'}}\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB'}} = -1$$

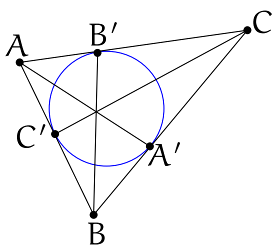
Indication : Calculer le barycentre de αA βB et γC où α, β, γ sont trois poids arbitraires.



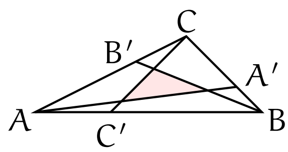
Exercice 8*. *Droite de Gauss-Newton.* Soient $ABCD$ un quadrilatère, $E = (AB) \cap (CD)$ et $F = (AD) \cap (BC)$ les intersections de ces côtés opposés. Montrer que les milieux des diagonales AC, BD et du segment EF sont alignés.



Exercice 9. *Droite de Simpson.* Soit ABC un triangle, X un point. Soient $A'B'C'$ sont des bases de droites perpendiculaire au côtés du triangle passant par X. Alors A',B', C' sont colinéaires si et seulement si X, A, B et C sont cocirculaires.



Exercice 10. Soit ABC un triangle et $A'B'C'$ sont les points d'intersection du cercle inscrit avec les cotés de ABC respectifs. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourants.



Exercice 11*. Soit ABC un triangle d'aire 1 et A', B', C' sont des points sur les cotés tels que $\frac{A'B}{A'C} = -x$, $\frac{B'C}{B'A} = -y$ et $\frac{C'A}{C'B} = -z$. Trouver l'aire du triangle délimité par les droites AA', BB' et CC' (Théorème de Routh).

Exercice 12. Soient l_1 et l_2 deux droites dans le plan qui s'intersectent en un point A et forment un angle α. Trouver la composition de symétries dans ces droites.

Exercice 13. Trouver le birapport de

a. $1, 2, 3, \infty$,

b. Les sommets d'un carré $0, 1, 1+i, i$,

c. Quatre sommets consécutifs d'un n-gone $1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, e^{\frac{6\pi i}{n}}$.

Exercice 14. Trouver l'équation du cercle passant par les points $0, 2, i$ dans les coordonnées complexes.

Exercice 15. Trouver l'image de par l'homographie $z \mapsto z^{-1}$ de

a. cercle $(z-1)(\bar{z}-1)-1=0$

b. cercle $(z+1)(\bar{z}+1)-1=0$

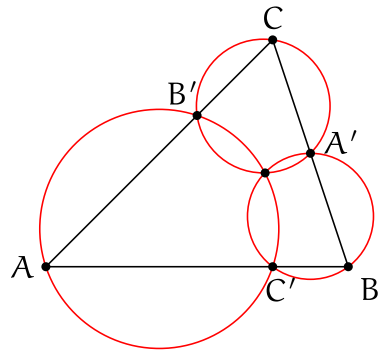
c. hyperbole $z^2+\bar{z}^2=1$.

d. parabole $z^2+\bar{z}^2+z+\bar{z}=1$.

Exercice 16. On dit qu'un quadruplet de points A, B, C, D de la droite projective est *harmonique* si le birapport $[A, B, C, D] = \frac{(A-D)(B-C)}{(A-B)(D-C)}$ vaut -1.

Soient c_1 et c_2 deux cercles orthogonaux, et soit l la droite passant par ces centres. Montrer que les points d'intersection entre et la droite l et les cercle forment un triplet harmonique.

Exercice 17. *Théorème de Miquel.* Soit ABC un triangle, $A'B'C'$ le points sur les côtés respectifs. Montrer que les cercles circonscrit autour des triangles $AB'C'$, $A'BC'$ et $A'B'C$ ont un point commun. (Théorème de Miquel.)



Exercice 18. En combien de composants connexes trois droites en position générale partagent

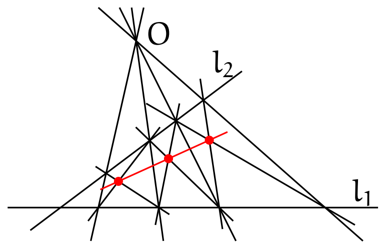
a. le plan affine.

b. le plan projectif réel.

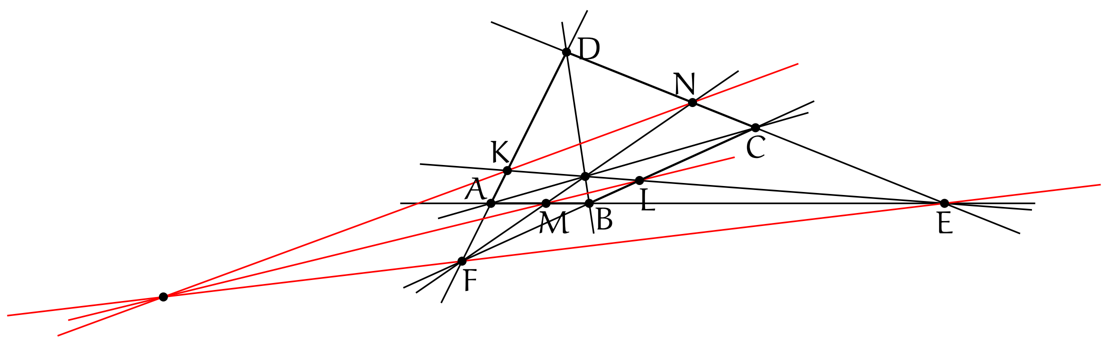
c. la droite projective complexe.

Exercice 19. Combien de points fixe peut avoir une transformation d'un plan projectif ?

Exercice 20. Soit l_1 et l_2 deux droites et O un point n'y appartenant pas. Monter que les points d'intersection des diagonales de quadrilatères dont deux cotés passent par O et deux appartiennent à l_1 et l_2 sont alignés.

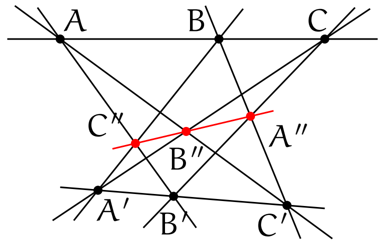


Exercice 21. Soit O l'intersection des diagonales d'un quadrilatère $ABCD$, E et F les points d'intersection des côtés opposés. K,L,M,N les points d'intersection entre les cotés de $ABCD$ avec les droites OE et OF. Montrer que les droites KM,LN et EF sont concourant.

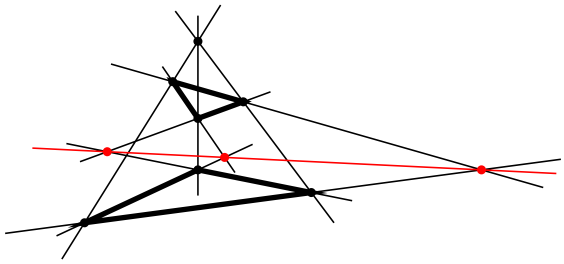


Exercice 22. Dans l'exercice 21, trouver le birapport $[F, A, K, D]$.

Exercice 23. *Théorème de Pappus.* Soient A,B,C et A',B',C' de triplets de points alignés. Alors les points d'intersection $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = CA' \cap C'A$ et $C'' = AB' \cap A'B$ sont aussi alignés.



Exercice 24. *Théorème de Desargues.* Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes. Alors les points d'intersections $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$ et $C'' = AB \cap A'B'$ sont alignés.

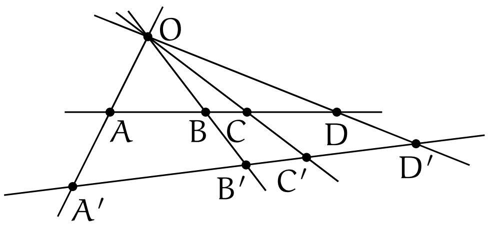


Exercice 25. Soit ABC un triangle et AX la médiane. Trouver la droite l passant par A telle que le birapport $[(AB),(AX),(AC),l] = -1$.

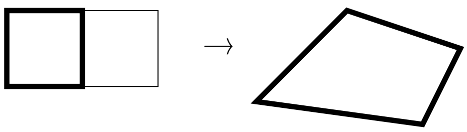
Exercice 26.

a. On considéré un quadruplet de droites dans le plan passant par un point O et encore deux droites disjointes de O. On notera A,B,C,D et A',B',C',D' les point d'intersection du quadruplet avec les deux autres droites respectives. Montrer que $[A,B,C,D] = [A',B',C',D']$.

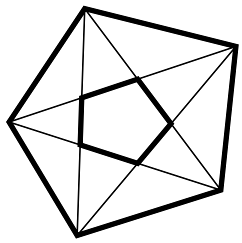
b. Soient l et l' deux droites, $A,B,C,D \in l$ quatre points distincts sur l et A',B',C' trois points distincts sur l'. Construire le point D' sur l' tel que les birapports $[A,B,C,D]$ et $[A',B',C',D']$ coïncident.



Exercice 27. Soit $ABCD$ un quadrilatérale et soit t une transformation projective qui envoie un carré standard sur ce quadrilatère. Construire l'image $DCEF$ du carré standard adjacent.



Exercice 28. Considérons un pentagone dans le plan. Montrer que le pentagone formé par ces diagonales est projectivement équivalent au pentagone initial.

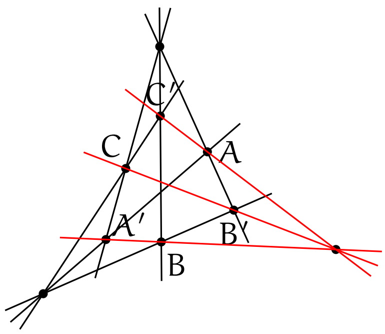


Exercice 29. Construire la droite entre deux points avec une règle courte.

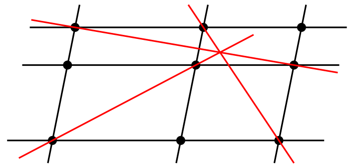
Exercice 30. Formuler le théorème dual au théorème de Pappus.

Exercice 31. Formuler le théorème dual au théorème de Desargues.

Exercice 32. Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les droites AA', BB' et CC' sont concourants et les droites AB', BC' et CA' sont concourant. Montrer que AC', BA' et CB' sont aussi concourants.



Exercice 33. Soient l_1, l_2, l_3 et m_1, m_2, m_3 deux triplets de droites parallèles et soient $A_{ij} = l_i \cap l_j$. Montrer que les droites $A_{11}A_{22}$, $A_{13}A_{32}$ et $A_{31}A_{23}$ sont concourants.



Exercice 34. Tracer les configuration duale à

a. Ensemble de droites parallèles $\{y = n | n \in \mathbb{Z}\}$.

b. Quatre droite est six point d'intersections.

Exercice 35. Soit X un convexe dans un plan projectif.

a. Montrer que l'ensemble de droites disjointes avec X est dual à un convexe dans le plan projectif dual.

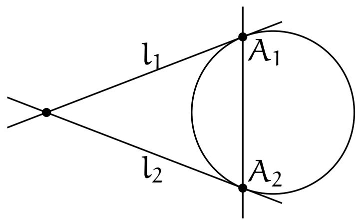
b. Trouver cet ensemble dans le cas ou X est un triangle.

Exercice 36. Soit Q une conique dans un plan projectif. Trouver la courbe formée par les tangents à Q dans le plan dual.

Exercice 37. Soit Q un cercle, l_1 et l_2 deux tangentes dans les points A_1 et A_2, respectivement. Tracer l'image de cette configuration par la transformation projective que envoie

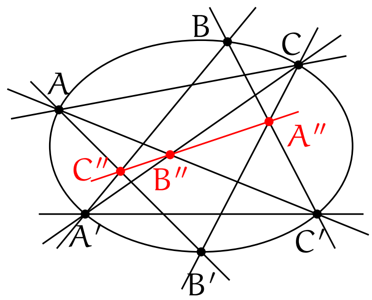
a. la droite l_1 à l'infini.

b. la droite A_1A_2 à l'infini.



Exercice 38. Soient A, B, $C_1, \dots C_4$ six points distincts sur une conique. Montrer que les birapports des droites AC_i et BC_i sont égaux.

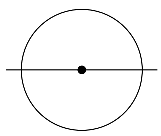
Exercice 39. *Théorème de Pascal.* Soient A, B, C et A', B', C' deux triplets de points sur une conique. Alors les points d'intersection $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = CA' \cap C'A$ et $C'' = AB' \cap A'B$ sont alignés.



Exercice 40. *Théorème de Brianchon.* Formuler le théorème dual au théorème de Pascal.

Exercice 41.*

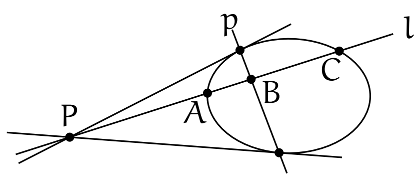
a. Soit A un point à l'intérieur d'une conique q et l une droite passant par a. Montrer qu'il existe une transformation projective qui envoi q vers le cercle unité, A vers l'origine et l vers l'axe des abscisses.



b. Soit h est une homographie d'une conique Q. Montrer qu'il existe une extension unique de h au plan projectif.

c. Trouver les homographies du plan projectif préservant le cercle unité correspondant au homographies du cercle unité $z \to z + 1$, $z \to 1/z$ et $z \to \lambda z$.

Exercice 42. Soient Q une conique, P un point disjoint de Q et p sa polaire par rapport à Q. Soit l une droite passant par P et soient A, C et B les points d'intersection de l avec Q et p, respectivement. Trouver le birapport $[P, A, B, C]$.



Exercice 43. Trouver la polaire d'un point par rapport à une conique dégénérée.

Exercice 44. *Théorème de Lamé.* Montrer que les polaires d'un point par rapport a un faisceau de coniques sont concourants.

Exercice 45. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans une conique q. Soient $l_A, \dots, l_D$ les tangents à la conique dans les poins respectifs. Montrer que les poins $(AB) \cap (CD)$, $(BC) \cap (DA)$, $l_A \cap l_C$ et $l_B \cap l_D$ sont alignés.

Exercice 46.

a. Écrire l'équation du faisceau des coniques passant pas les points $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$. Combien de coniques de ce faisceau sont dégénérées. Traces les.

b. La même question pour les points $(-1, 0)$,$(0, -1)$,$(1, 0)$,$(0, \infty)$.

Exercice 47. Soit $ABCDE$ cinq points dans le plan. Construire la tangente en A à la conique passant par $ABCDE$.

Exercice 48. On donne quatre droites en position générale dans un plan affine. Montrer qu'il existe une et une seule parabole tangente à ces quatre droites.

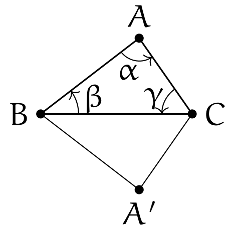
Exercice 49. Trouver la limite du théorème de Brianchon quand l'hexagone se dégénére en quadrilatère.

Exercice 50. Construire les points de tangence d'un pentagone avec la conique inscrite.

Réponses et corrections :

1 : $S_C\circ S_B = 2\vec{BC}$, $S_A\circ S_C = 2\vec{CA}$, $S_B\circ S_A = 2\vec{AB}$ alors $S_C\circ S_B\circ S_A\circ S_C\circ S_B\circ S_A = 2\vec{BC}+2\vec{CA}+2\vec{AB} = id$

3a :



L'angle totale de rotation est $2\alpha+2\beta+2\gamma = 2\pi$ donc la composition peut être soit une translation soit l'identité. Considérons le triangle ABC' symétrique à ABC par rapport à la droite AB. Alors $R_C^{2\gamma}(A) = A'$, $R_B^{2\beta}(A') = A$, $R_A^{2\gamma}(A) = A$. Alors A est un point fixe de la composition et donc elle est égale à l'identité.

3b : Considérons la droite BC. Elle est préservé par H_C^c et H_B^b. Alors elle est préservé par la composition $H_B^b H_C^c$ et donc par H_A^a. Alors $A \in BC$.

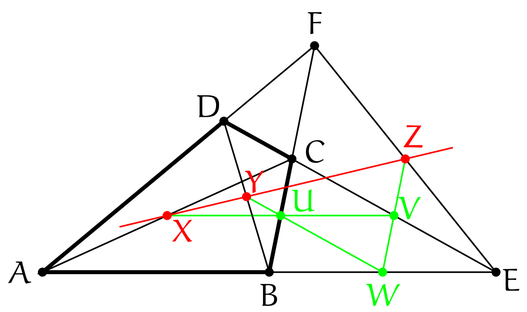
4a : $R_A^{\pi/3}(C') = B$, $R_A^{\pi/3}(C) = B'$ alors $|CC'| = |BB'|$ et $\angle(BB', CC') = \pi/3$.

4b : Soit $O = BB' \cap CC'$. Les points A, C', B, O sont cocirculaires car les angles opposés du quadrilatère $AC'BO$ sont complémentaires. De même A,O,C, B' sont cocirculaires. Alors A',C,O,B sont cocirculaires. Alors les cercles circonscrits autour des trois triangles passent par O. De même ils passent par les points d'intersection $CC'\cap AA'$ et $CC'\cap AA'$. alors ces points d'intersections coïncident.

4c : $R_{A''}^{2\pi/3}(C) = B$, $R_{B''}^{2\pi/3}(B) = A$, $R_{C''}^{2\pi/3}(A) = C$ alors $R_{C''}^{2\pi/3}R_{B''}^{2\pi/3}R_{A''}^{2\pi/3}(C) = C$. Car la somme des angles de rotation est 2π et il y a un point fixe, la composition $R_{C''}^{2\pi/3}R_{B''}^{2\pi/3}R_{A''}^{2\pi/3}$ est l'identité. Alors le triangle $A''B''C''$ est equilateral.

6 : Soient $a = \frac{\vec{A'B}}{\vec{A'C}}$, $b = \frac{\vec{B'C}}{\vec{B'A}}$ et $c = \frac{\vec{C'A}}{\vec{C'B}}$. Selon l'hypothèse, $abc = 1$ et alors la composition des homothéties $H_{A'}^a \circ H_{B'}^b \circ H_{C'}^c$ est une translation, mais car elle a le point fixe B elle est égale à l'identité, alors A', B' et C' sont alignés.

8 :

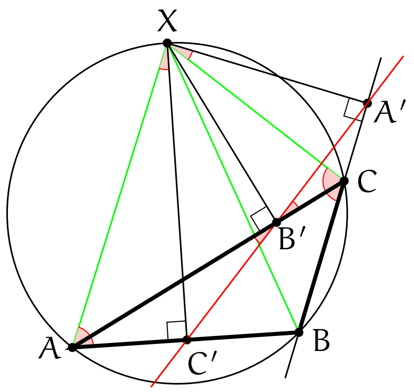


Soient X,Y et Z les moities de CA, DB et FE et U,V et W de CB, EC et BE, respectivement. On a

$$\frac{XV}{XU}\frac{YU}{YW}\frac{ZW}{ZV} = \frac{AE}{AB}\frac{DC}{DE}\frac{FB}{FC} = 1$$

La première inégalité découle de la similitude. La dernière est le théorème de Menelaüs pour le triangle AED et la droite BF. Alors de nouveau par le théorème de Menelaüs pour le triangle UVW et la droite XZ on déduit que X, Y et Z sont alignés.

9 :



Soit $\alpha = \angle A'B'C$.

1. $\angle A'XC = \alpha$ car le quadrilatère $XBCA'$ est inscrit dans un cercle
2. $\angle XCB = \pi/2+\alpha$ comme l'angle extérieur du triangle XCB.
3. $\angle XAB = \pi/2-\alpha$ car le quadrilatère $XABC$ est inscrit dans un cercle.
4. $\angle AXC' = \alpha$ comme an autre angle d'un triangle rectangle.
5. $\angle AB'C' = \alpha$ car le quadrilatère $XAC'B'$ est inscrit dans un cercle.

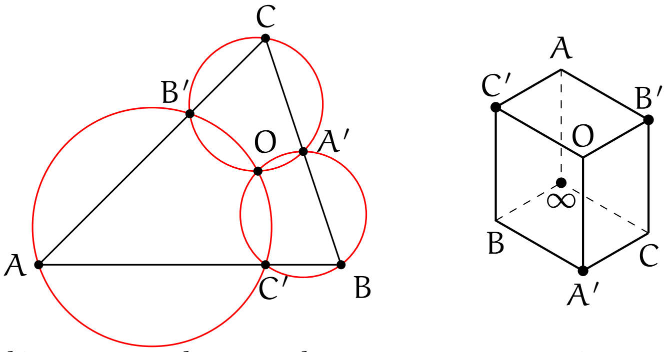
Donc $\angle A'B'C = \angle AB'C'$ et les points A',B' et C' sont alignés.

10 : Une bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de l'angle et du cercle inscrit dans cet angle. Alors $|AB'| = |AC'|$, $|BC'| = |BA'|$ et $|CA'| = |CB'|$. Donc $\frac{|AB'||BC'||CA'|}{|AC'||BA'||CB'|} = 1$ et selon Ceva les segments AA', BB' et CC' sont concourants.

11 : $\dfrac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}$ Théorème de Routh ;

12 : $R_O^{2\alpha}$ ou α est l'angle entre les droites et O et le point de ces intersecton.

17 :

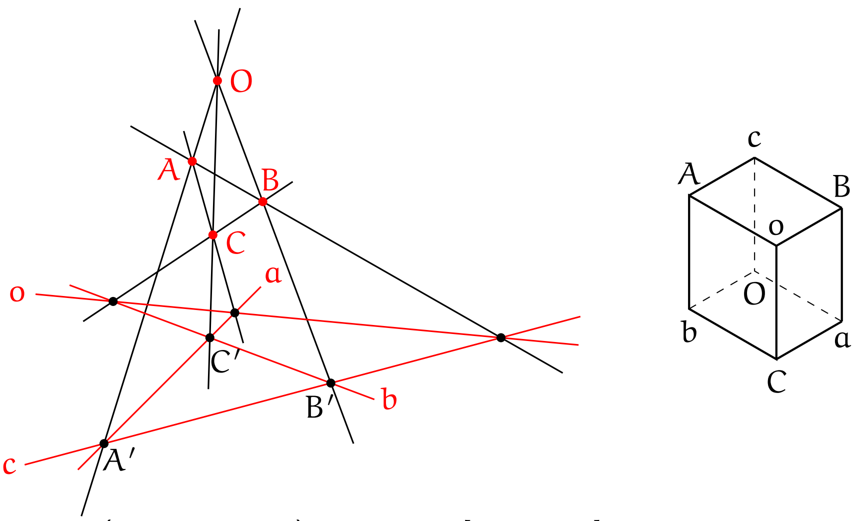


Considérons un cube avec les sommets marqués par les points A,B, C, A' et les points B',C' et O, ou O est l'intersection des cercles circonscrits autour $AB'C$ et $A'BC'$ comme indiqué sur le dessin. Observons que les points associés aux sommets de chaque face sont cocirculaires (ou colinéaires si un de point est ∞). A chaque face on peut attacher un birapport de ces sommets dans l'ordre trigonométrique en commençant par un sommet marqué noir. Par exemple à la face supérieure on associe le birapport $[C'OB'A] = \frac{(A-C')(O-B')}{(A-B')(O-C')}$. Les différences dans le birapport correspondent aux côtés de la face. Le produit de birapports sur toutes les faces

$$[C'OB'A][A'CB'O][\infty AB'C][A\infty BC'][BA'OC'][A'B\infty C]$$

est égal à 1 car chaque différence entre dans le produit deux fois — une fois dans le numérateur et une dans le dénominateur. Car les poins sur cinq faces sont cocirculaires, les birapports correspondants sont réels et donc le sixième birapport est aussi réel et le point O et cocirculaire avec A',B' et C.

24[1].



On introduit (l'analogue de) birapport $[l, X, m, Y]$ pour deux points et deux droites par

$$[l, X, m, Y] = \frac{F_l(X)F_m(Y)}{F_l(Y)F_m(X)},$$

où $F_l = 0$ et $F_m = 0$ sont les équations de l et m, respectivement. On clame que $[l, X, m, Y] = 1$ si est seulement si les droites l, m et XY sont concourants.

Reformulons maintenant le théorème. Considérons un cube avec les sommets marqués par les droites a,b, c, o et les points A,B,C,O comme indiqué sur le dessin. Chaque face du cube correspond

1. Cette démonstration appartiens à S.Fomin et P.Pilyavsky *Incidences and tilings* arxiv/2305.07728

à deux points et deux droites. A chaque face on peut associer le birapport de droites et de points correspondants a ces sommets pris dans l'ordre trigonométrique.

Observons que selon l'hypothèse les birapports correspondants a toutes le faces à l'exception de peut être $[oCaB]$ sont égales à 1. Le théorème clame que ce dernier birapport est aussi égal à 1.

Le produit de six birapports correspondant aux faces du cube

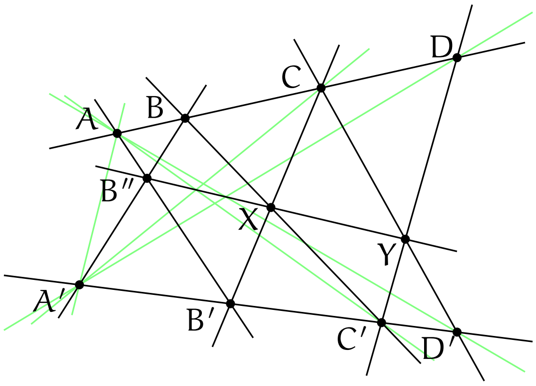
$$[oCaB][aOcB][cObA][bCoA][cAoB][aCbO] = 1$$

est égal a 1 car toute les numérateurs et dénominateurs dans ce produit se simplifient. Donc $[oCaB] = 1$.

25. Soit $Y = l \cap (BC)$. Introduisons le coordonnée z sur la droite BC telles que $z(B) = -1$, $z(X) = 0$ et $z(C) = 1$. La condition sur le birapport implique que $-1 = [B, X, C, Y] = [-1, 0, 1, z(Y)] = \frac{(z(Y)+1)(0-1)}{(z(Y)-1)(0+1)}$ et alors que $z(Y) = \infty$. Cela signifie que le point Y est à l'infini et que la droite l est parallèle à la droite BC.

26a. Les transformation projectives preservent les birapports. Considérons la transformation projective qui envoie le point O à l'infini. Le droites OA, OB, OC et OD deviennnent parallélles et la proposition est evidente.

26b :



Construction : Traçons d'abord les points $B'' = AB' \cap A'B$ et $X = BC' \cap B'C$. Puis le point $Y = C'D \cup B''X$. Puis le point $D' = CY \cap A'B'$. *Démonstration* : Construisons $A'' = AA' \cap B''X$, $C'' = AC' \cap A'C$ et $A'D \cap AD'$. Par construction A'' et B'' appartiennent à $B''X$ et par le théorème de Pappus C'' et D'' y appartiennent aussi. Le quadruplet A, B, C, D est la projection centrale depuis A' du quadruplet A,B,C,D, donc $[A''B''C''D''] = [A, B, C, D]$. De même $[A''B''C''D''] = [A', B', C', D']$.

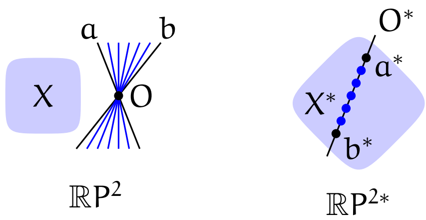
28. Soit $ABCDE$ le grand pentagone et $A'B'C'D'E'$ le petit. Soit h une transformation projective telle que $h(ABCD) = A'B'C'D'$. Elle existe et est unique car une transformation projective est uniquement déterminé par l'image de quatre points. Il faut montrer que $X := h(E) = E'$. On a des identités des birapports :

$$[D'C', D'B', D'A', D'E'] = [D'E, D'B', D'A', D'C] = [DE, DB', DA', DC] =$$

$$= [DE, DA, DB, DC] = [D'X, D'A', D'B', D'C'] = [D'C', D'B', D'A', D'X]$$

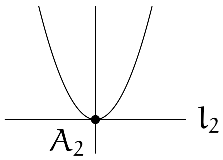
la dernière égalité est la conséquence de la symétrie de birapport : $[X, Y, Z, W] = [W, Z, Y, X]$. Alors $D'X = D'E'$. De même $A'X = A'E'$, d'où $X = E'$.

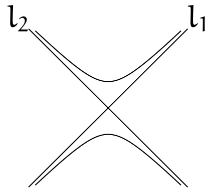
35 :

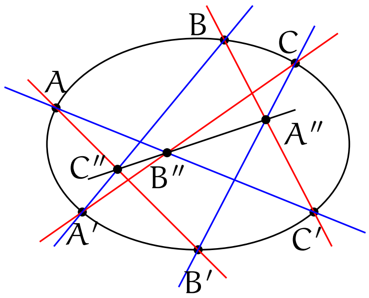


Rappelons que un sous-ensemble $X \in \mathbb{R}P^2$ est *convex* si pour tout points $A, B \in X$ exactement un des deux segments entre A et B appartient à X. Soit $X^* \subset \mathbb{R}P^{2*}$ l'ensemble de points duaux aux droites disjointes de X. Soient $a^*, b^* \in X^*$ deux points de X^* correspondant aux droites $a, b \subset \mathbb{R}P^2$ et soit $O = a \cap b$. Les droites a et b découpent le plan projectif en deux morceau et l'ensemble X appartient a un entre eux. La droite $O^* \subset \mathbb{R}P^{2*}$ connecte les points A et B. L'ensemble de droites passant par

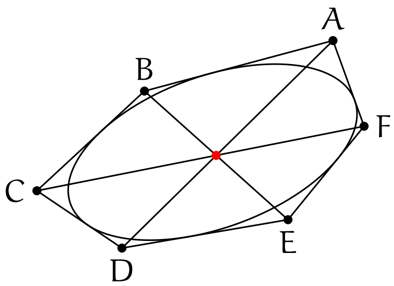
O et par le morceau sans X correspondent aux points d'un segment entre $a*$ et b^* et évidemment il appartient à X.

37a : 

b : 

39. 

Soit $Q(X) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ une équation de la conique. (Le polynôme Q de degré 2 est défini à multiplication par une constante près par les conditions $Q(A) = Q(B) = \cdots = Q(C') = 0$). Pour deux points distinctes U et V notons $L_{UV}(X) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ une équation de la droite passant par U et V. Considérons trois polynômes de degré 3 : $P = L_{AC'}L_{A'B}L_{B'C}$, $R = L_{A'C}L_{AB'}L_{B'C}$ et $S = QL_{A''C''}$. L'espace de polynômes de deux variables de degré 3 a la dimension 10. L'espace de polynômes de degré 3 qui s'annulent, comme P, R et S, dans les 8 points A,B,C,A',B',C',A'', C'' a la dimension 10-8=2. Donc le polynôme S s'exprime comme une combinaison linéaire $S = \lambda P + \mu R$. Donc $S(B'') = 0$ et donc $L_{A''C''}(B'') = 0$ car $R(B'') = S(B'') = 0$ et $Q(B'') \neq 0$.

40 : 

Soit ABCDEF un hexagone circonscrit autour d'une conique. Alors ces diagonales AD BE et CF sont concourants.

41a : Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{L}$ les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ correspondant au point A et à la droite $l \ni A$. Soient $\tilde{Q}$ une forme quadratique de signature $(2,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ correspondant à la conique et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est la forme bilinéaire correspondante. La restriction de $\tilde{Q}$ sur $\tilde{A}$ et $\tilde{L}$ a la signature $(0,1)$ et $(1,1)$, respectivement. Donc on peut choisir (utilisant la procédé de Gram-Schmidt) une base v_X, v_Y, v_Z telle que $v_Z \in \tilde{A}$, $v_Y \in \tilde{L}$, orthogonal par rapport à la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et telle que $\tilde{Q}(v_X) = \tilde{Q}(v_Y) = 1$ et $\tilde{Q}(v_Z) = -1$. Dans cette base la forme $\tilde{Q}$ s'écrit comme $\tilde{Q}(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 - Z^2$, L'équation de $\tilde{L}$ est $Y = 0$ et de $\tilde{A}$ est $X = Y = 0$. En coordonnée affines cela donne $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$ et $x = y = 0$, respectivement.

41b : On peut présenter les éléments de l'espace $\{(A,B)\} = \mathbb{R}^2$ comme vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ et les éléments de l'espace $\{(X,Y,Z)\} = \mathbb{R}^3$ avec les matrices 2×2 symétriques. $\begin{pmatrix} X+Z & Y \\ Y & X-Z \end{pmatrix}$. Les matrices dégénérées forme un cône définie par l'équation $\det \begin{pmatrix} Z+X & Y \\ Y & Z-X \end{pmatrix} = Z^2 - X^2 - Y^2 = 0$. Considérons l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & AB \\ AB & B^2 \end{pmatrix}$. Cette correspondance définie un isomorphisme entre la droite et la conique en coordonnées projectives. Dans ces coordonnées une homographie est une transformation $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Sur le cône cette transformation agit comme

$$\begin{pmatrix} A^2 & AB \\ AB & B^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 & AB \\ AB & B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

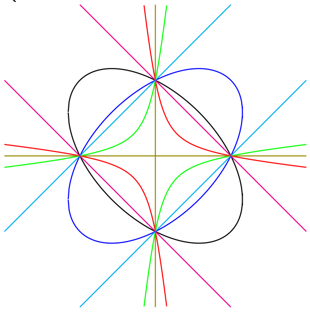
qui se prolonge évidement sur $\mathbb{R}^3$ par $\begin{pmatrix} Z+X & Y \\ Y & Z-X \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z+X & Y \\ Y & Z-X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

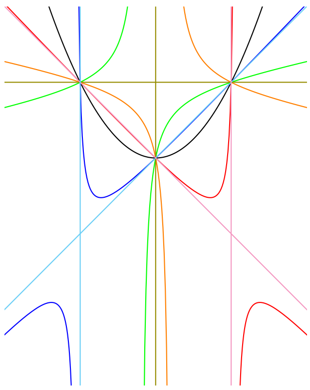
41c :

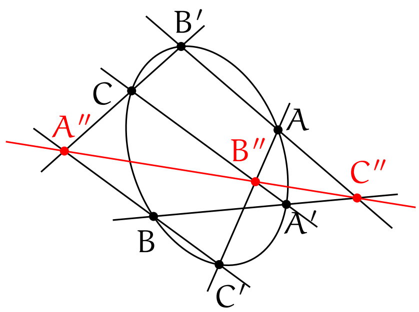
$(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x+2y+1}{-x+2y+3}, \dfrac{-2x+2y+1}{-x+2y+3} \right)$

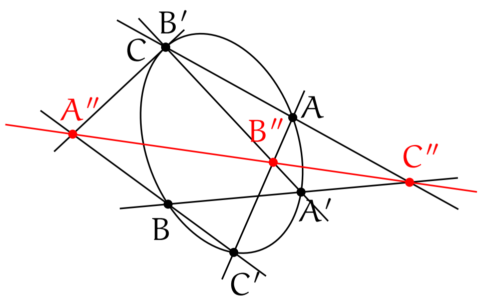
$(x,y) \mapsto (-x,y)$

$(x,y) \mapsto \left(\dfrac{(\lambda^2+1)x+(\lambda^2-1)}{(\lambda^2-1)x+(\lambda^2+1)}, \dfrac{2y}{(\lambda^2-1)x+(\lambda^2+1)} \right)$

46a :  $x^2+y^2+\alpha xy = 1$. Les coniques dégénérées correspondent à $\alpha = \pm 2$ et $\alpha = \infty$.

46b :  $x^2+\alpha xy - y = 1$. Les coniques dégénérées correspondent à $\alpha = \pm 1$ et $\alpha = \infty$.

47 : Traçons d'abord le théorème de Pascal lorsque l'ordre de points sur la conique est $AB'CBC'A'$ afin que les points B' et C soient voisins. On obtiens 

Traçons maintenant le théorème dans la limite $B' \to C$: 

. Alors, a partir des points $A, A', B, C, C' = B$. on peut construire $B'' = A'C \cap AC'$ ensuite $C'' = BA' \cap CA$ puis $A'' = B''C'' \cap BC'$ et finalement la tangente $A''C$.