Introduction de la topologie algébrique
CCII - Avril 2016

Partie 1
Justifiez votre réponse brièvement.

Exercice 1 Est-ce qu'il existe

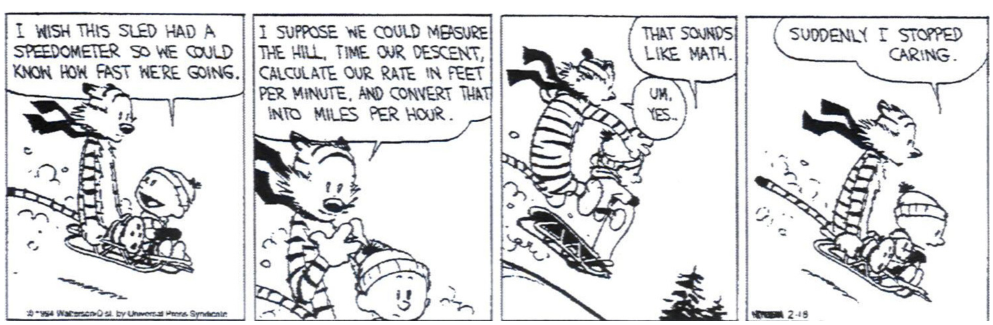
1. un revêtement de $p : X \to S^1$ tel que $\pi_1(X)$ est un groupe fini non-trivial.

2. un revêtement non-trivial $p : BM \to BM$ d'une bande de Möbius (BM) par une bande de Möbius.

3. une application non-constante (à homotopie près) $f : \mathbb{RP}^2 \to T^2$

Exercice 2 1. Donner le revêtement universel de la bande de Möbius.

2. Soient α, β les generators de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ correspondant à deux composants S^1 de $S^1 \vee S^1$. Trouver (dessiner une image) le revêtement $p : X \to S^1 \vee S^1$ correspondant au sous-groupe engendré par $\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta$.



Bon courage et amusez vous bien.

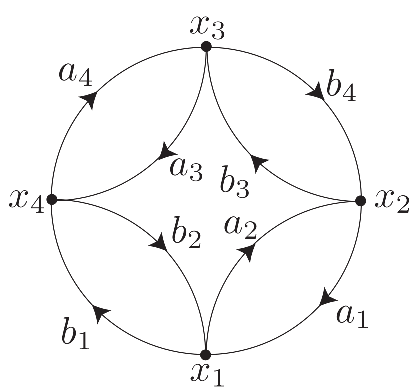
Partie 2

Justifiez votre réponse et prenez soin de l'écriture s.v.p.

Exercice 3 On considère le revêtement $p : \mathbb{R} \to S^1$ tel que $p(t) = e^{2\pi i t}$. Quels sont les automorphismes de p?

Exercice 4 Montrer que si X est connexe par arcs, localement connexe par arcs, et $\pi_1(X)$ est fini alors, chaque application continue $X \to S^1$ est homotope à l'application constante.

Exercice 5 Soient α, β les generators de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ correspondant à deux composants S^1 de $S^1 \vee S^1$. Soit $p : X \to S^1 \vee S^1$ un revêtement tel que $p(a_i) = \alpha, p(b_i) = \beta, p(x_i) = y$, voir figure ci-dessous.



1. Trouver $\pi_1(X, x_1)$ et $p_\#(\pi_1(X, x_1))$.
2. Est-ce qu'il existe un automorphisme D tel que $D(x_1) = x_j, j = 2, 3, 4$.
3. Est-ce que p est un revêtement distingué?
4. Trouver le groupe d'automorphisme $\Delta(X, p)$.

Exercice 6 L'application antipode $x \to -x$ de S^n, $n > 1$ engendre une action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n. L'espace d'orbit est l'espace projective $\mathbb{RP}^n = S^n/x \sim -x$. Trouver $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$.