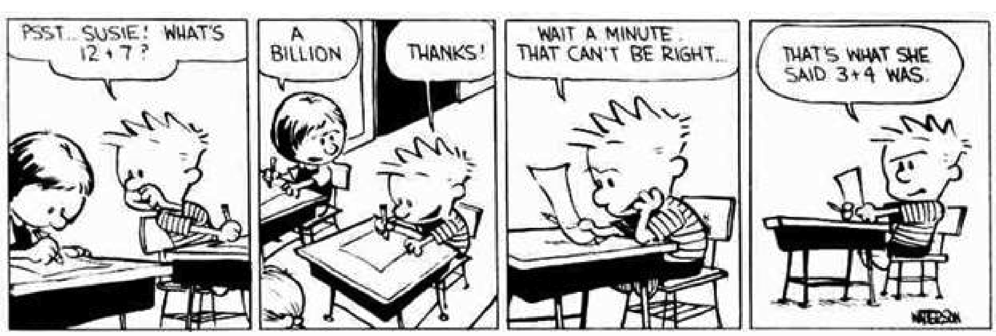
Introduction de la topologie algébrique
CCI - Février 2016

Partie 1
Justifiez votre réponse brièvement.

Exercice 1 Est-ce que c'est possible d'avoir une homotopie entre :

1. l'application identité : $D^n \to D^n$ où $D^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$ et l'application constante : $D^n \to D^n$ à valeur zero.
2. l'application identité : $S^1 \to S^1$ et une application constante : $S^1 \to S^1$.
3. l'inclusion : $D^2 \to \mathbb{R}^2$ et une application constante : $D^2 \to \mathbb{R}^2$.
4. l'inclusion : $S^1 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ et une application constante : $S^1 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Exercice 2
1. Trouver deux applications non-homotopes de S^1 dans T^2.
2. Trouver deux applications non-homotopes relative à deux extrémités de $[0, 1]$ à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
3. Trouver une application injective de $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui est homotope à une application constante $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.



Bon courage et amusez vous bien.

Partie 2

Justifiez votre réponse et prenez soin de l'écriture s.v.p.

Exercice 3

1. Soient X, Y deux espaces topologiques et $x_0 \in X, y_0 \in Y$. On considère $X \vee Y = X \sqcup Y/_{x_0 \sim y_0}$. Trouver $\pi_1(X \vee Y, [x_0])$.
2. Trouver $\pi_1(T^2 \vee (MB \times S^2))$ où MB est une bande de Möbius.

Exercice 4 Soit X un espace obtenu de $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ en collant un disque D^2 le long de ∂D^2 sur le cercle $(S^1, 0, 0) \subset T^3$. Trouver $\pi_1(X)$.

Exercice 5 Le cone CX d'un espace topologique X est l'espace quotient obtenu en écrasant le sous espace $X \times 0$ de $X \times [0,1]$. Soit $q : X \times [0,1] \to CX$ l'application quotient. On note ι_X l'application

$$\begin{array}{rccc} \iota_X : & X & \to & CX \\ & x & \mapsto & q(x,1) \end{array}$$

Soit $f : X \to Y$ une application continue.

• Montrer que f est homotope à une application constante si et seulement s'il existe une application $F : CX \to Y$ telle que $F \circ \iota_X = f$.

• Montrer que pour tout espace X, le cone CX est contractile.

Exercice 6 Soit $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopies des applications continues $X \to Y$.

1. Montrer que pour chaque espace topologique X, l'ensemble $[X, I]$ a un seul élément.
2. Montrer que le nombre des éléments dans $[I, X]$ est égale au nombre des composantes connexes par de X.