Groupes Fondamentaux

Exercice 1. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que deux chemins quelconques dans $\mathbb{R}^n$ de x à y sont homotopes.
(b) Soit Y un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\pi_1(Y, y)$ est trivial pour chaque $y \in Y$.
(c) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ étoilé centré à a. Montrer que $\pi_1(A, a)$ est trivial.

Exercice 2. Soient f_0, f_1, g_0, g_1 chemins dans un espace topologique X tels que f_0 et g_0, f_1 et g_1 sont concaténables. Montrer que si $f_0 * g_0$ est homotope à $f_1 * g_1$ et g_0 est homotope à g_1, alors f_0 homotope à f_1.

Exercice 3. Soient X, Y deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $h : Y \to X$ trois applications continues. Si on a des homotopies $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ et $h \circ f \sim \mathrm{id}_X$, montrer que f est une équivalence d'homotopie, et $g \sim h$. Plus généralement, si on suppose seulement que $f \circ g$ et $h \circ f$ sont des équivalences d'homotopie, montrer que f, g, h sont tous des équivalences d'homotopie.

Exercice 4. (1) Si X et X', resp. Y et Y', sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents, montrez que $X \times Y$ et $X' \times Y'$ ont même type dhomotopie.
(2) Soit E un sous-espace de dimension k de $\mathbb{R}^n$, avec $k < n$. Montrez que $R^n \backslash E$ a le même type d'homotopie que S^{n-k-1}.
(3) Soit C un sous ensemble convexe borné de R^n. Montrez que $R^n \backslash C$ a le même type d'homotopie que S^{n-1}.
(4) Soit X un espace topologique, et A et B deux sous-espaces de X. Montrez que lon peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \backslash A$ et $X \backslash B$ soient homotopiquement équivalents.

Exercice 5. Soit X_0 est une composante connexe de X qui contient le point x_0. Montrer que $\pi_1(X_0, x_0)$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0)$.

Exercice 6. (1) Montrer qu'un anneau n'est pas homéomorphe à un cercle mais ces deux espaces sont homotopiquement équivalents.
(2) Montrer que si $r : X \to A$ est un rétracte et X est contractile, alors A est contractile.

Exercice 7 (Théorème de Brouwer)**.** Montrer que chaque application continue $f : D^2 \to D^2$ a au moins un point fixe

Exercice 8. (a) Montrer que si $f, g : X \to Y$ sont null-homotopes et Y est connexe par arc. Alors f, g sont homotopes.
(b) Montrer que si Y est contractile, alors chaque $f : X \to Y$ null-homotope.
(c) Montrer que si X est contractile, alors chaque $f : X \to Y$ null-homotope.

(d) Montrer que si X est contractile, alors X est connexe par arc.

Exercice 9. (a) Montrer que toute application continue $f : S^n \to S^n$ telle que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in S^n$ est homotope à l'application antipode $(x \to -x)$.
(b) Soit X un espace topologique. Montrer que toute application $f : X \to S^n$ qui n'est pas surjective est null-homotope.
(c) Montrer que si $A \subset S^n$ est une retraction par déformation. Alors, $A = S^n$.

Exercice 10. (1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et U_n sont homotopiquement équivalents.
(2) Montrer que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont homotopiquement équivalents.

Exercice 11. Rappelons qu'un groupe topologique G est un groupe muni d'une topologie telle que la loi de composition interne du groupe et le passage à l'inverse sont deux applications continues. Montrer que $\pi_1(G, e)$ est abélian.

Exercice 12. (a) Montrer que $\pi_1(S^2) = \{e\}$.
(b) Soit MB une bande de Möbius. Trouver $\pi_1(MB)$.
(c) Trouver $\pi_1(S^2/_{N\sim S})$, où N represent le pole nord et S le pose sud de S^2.
(d) Trouver $\pi_1(T^2)$ et $\pi_1(T^2 \setminus \{\text{n pts}\})$, pour $n = 1, 2, 3$.
(e) Trouver $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ et $\pi_1(KB)$ où KB est une bouteille de Klein.
(f) Trouver $\pi_1(\Sigma_g)$, une surface fermée orienté de genre g.
(g) Trouver $\pi_1(X)$ où $X = S^1 \times S^1 \cup MB/_{S^1\times\{\frac{1}{2}\}\sim\partial MB}$.
(h) Trouver $\pi(X)$ où X est un espace topologique obtenu par collant un disque D^2 sur $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ à son bord avec l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \partial D^2 \cong S^1 & \to & S^1 \\ z & \to & z^n. \end{array}$$

Exercice 13 (Théorème de Borsuk-Ulam)**.** Le théorème de Borsuk-Ulam affirme que pour toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, il existe toujours deux points antipodaux $x_1 = -x_2 \in \mathbb{S}^n$ avec le même image $f(x_1) = f(x_2) \in \mathbb{R}^n$. On se propose de le démontrer pour $n = 1$ et 2.

(1) Montrer le théorème de Borsuk-Ulam en dimension 1 ;
(2) Supposons $n = 2$, sous l'hypothèse de l'absurde que $f(x) \neq f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$, construire une application $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ qui envoie l'antipode à l'antipode : $g(-x) = -g(x)$;
(3) Restreignant g sur un grand cercle $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{S}^2$, montrer que le morphisme $g|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ n'est pas homotope au morphisme constant. Conclure.
(4) Une application *géographique* : à chaque instant, il toujours existe deux points antipodaux de la Terre ayant exactement la même température et la même pression atmosphérique.