Homologie

1. Soit $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ où X_α est une composante par arc de X. Montrer que $H_p(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha, \mathbb{Z}), \forall \alpha$ (Axiome d'additivité).

2. Si X est connexe par arcs et $f : X \to X$ une n'importe quelle application continue. Montrer que $f_* : H_0(X, \mathbb{Z}) \to H_0(X, \mathbb{Z})$ est identité.

3. (a) Montrer que si $f, g : X \to Y$ sont homotope, alors $f_* = g_* : H_p(X, \mathbb{Z}) \to H_p(Y, \mathbb{Z})$, $\forall p$ (Axiome d'homotopie).

   (b) Montrer que si un espace topologique X est homotopiquement équivalent à Y, alors $H_p(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $H_p(Y, \mathbb{Z}), \forall p$.

   (c) Si X est contractile, alors $H_p(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0 \\ 0 & p > 0. \end{cases}$

4. Soit $p : X \to Y$ un revêtement. On sait que $p_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ est injective. Est-ce que c'est vrai que $p_* : H_1(X, \mathbb{Z}) \to H_1(Y, \mathbb{Z})$ est injective ? Démontrer ou donner un exemple contre.

5. Montrer que si A est une rétract de X alors, l'application induit $H_p(A) \to H_p(X)$ par inclusion est injective. (Un sous-espace A de X est une rétract s'il existe l'application continue $r : X \to A$ telle que $\forall a \in A, f(a) = a$.)

6. (a) Soit X un espace contractile et $A \subset X$ un sous-espace. Montrer que $H_p(X, A)$ est isomorphe à $\tilde{H}_{p-1}(A)$, où $\tilde{H}_{p-1}(A)$ est l'homologie réduite de A.

   (b) Appliquez le résultat précédent pour trouver $H_p(D^2, S^1)$ où $S^1 = \partial D^2$.

(c) Soit X un espace topologique et A un sous-espace contractile. Montrer que que $H_p(X, A)$ est isomorphe à $\tilde{H}_p(X)$.

7. Montrer que $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ si $n \neq m$.

8. (a) Montrer que $H_0(X, A) = 0$ si et seulement si $A \cap X_\alpha \neq \emptyset$ pour chaque composants arcs X_α de X.

   (b) Montrer que $H_1(X, A) = 0$ si et seulement si $H_1(A) \to H_1(X)$ est surjective et chaque composant arc de X contient au moins un composant arc de A.

9. Montrer que homotopie de chaine de deux applications de chaines est une relation d'équivalence.

10. Pour un suite exacte $A \to B \to C \to D \to E$, montrer que $C = 0$ si et seulement si l'application $A \to B$ est surjective et $D \to E$ injective. Alors, pour le paire (X, A), l'inclusion $A \to X$ induit isomorphismes sur tous les groupes d'homologie si et seulement si $H_p(X, A) = 0, \forall p$.

11. Soit $f : (X, A) \to (Y, B)$ une application telle que $f : X \to Y$ et la restriction $f|_A : A \to B$ sont des équivalences d'homotopies.

    (a) Montrer que $f_* : H_p(X, A) \to H_p(Y, B)$ est une isomorphisme $\forall p$.

    (b) Considère l'inclusion $f : (D^n, S^{n-1}) \to (D^n, D^n - 0)$. Montrer que f n'est pas une équivalence d'homotopie (i.e. il n'existe pas $g : (D^n, D^n - 0) \to (D^n, S^{n-1})$ tells que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopes à idéntié.)