Homologie Partie II

1. (a) Appliquer le théorème de Mayer-Vietoris en récurrence sur n pour trouver $H_p(S^n)$, $\forall p \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.
(b) Appliquer le théorème de Mayer-Vietoris pour trouver $H_p(\mathbb{R}P^2)$, $\forall p \in \mathbb{Z}$.
(c) Appliquer le théorème de Mayer-Vietoris, pour trouver $H_p(S^1 \vee S^1)$ $\forall p$. Généraliser l'idée pour $H_p(\vee_k S^1), \forall p \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}$.

2. Utiliser la suite de Mayer-Vietoris pour montrer qu'ils existent les isomorphismes $\tilde{H}_p(X \vee Y) \cong \tilde{H}_p(X) \oplus \tilde{H}_p(Y)$ si les points bases de X et Y identifiés dans $X \vee Y$ sont des retractes par déformation des voisinages $U \subset X$ et $V \subset Y$.

3. (a) Utiliser la suite de Mayer-Vietoris pour calculer les groupes d'homologies de l'espace obtenue de $S^1 \times S^1$ en attachant une bande de Möbius (MB) via un homéomorphisme de $\partial MB \to S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times S^1$.
(b) Fait le même pour l'espace obtenue par attachant une bande Mobius (MB) à $\mathbb{R}P^2$ via un homéomorphisme $\partial MB \to \mathbb{R}P^1$ où le $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ standard de $\mathbb{R}P^2$.

4. Démontrer le théorème de point fixe de Brouwer pour les applications $f : D^n \to D^n$ en utilisant la théorie de degré pour l'application $S^n \to S^n$ qui prend le hémisphères sud et nord au hémisphère sud via f. (La démonstration originale de Brouwer).

5. (a) Montrer que l'application antipode $S^n \to S^n$ a degré $(-1)^{n+1}$.
(b) Si n est paire, montrer que l'application antipode n'est pas homotope à l'identité.
(c) Si n est paire, montrer que pour chaque application $f : S^n \to S^n$ il existe un point $x \in S^n$ tel que $f(x) = \pm x$.
(d) Si n paire, montrer que chaque application $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ a un point fixe.

6. Si $f : S^n \to S^n$ une application sans point fixe, montrer que $deg(f) = (-1)^{n+1}$.

7. Construire une application surjective $S^n \to S^n$ de degré zéro pour chaque n.

8. Montrer que chaque application $S^n \to S^n, n > 0$ homotope à une application qui a un point fixe.

9. Montrer que chaque deux réflexions de S^n par rapport aux hyperplanes différents sont homotopes. (En fait, il sont homotopes même parmi les réflexions). [Penser à la formule algébrique de réflexion en fonction de produits intérieurs.]

10. Soit X un espace de quotient obtenue de S^2 par une identification $x \to -x$ sur l'équateur $S^1 \subset S^2$. Calculer $H_p(X)$. Même question pour S^3 avec des points antipodes de équatorial $S^2 \subset S^3$ identifiés.

11. Montrer que l'application quotient $S^1 \times S^1 \to S^2$ qui contracte le sous espace $S^1 \vee S^1$ à un point n'est pas null-homotope en montrant qu'il induit un isomorphisme sur H_2. Par contre montrer en utilisant les revêtements que chaque application $S^2 \to S^1 \times S^1$ est null-homotope.

12. (a) Donner une structure de complexe cellulaire de $\mathbb{R}P^n$ et calculer $H_p(\mathbb{R}P^n)$, $\forall p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. (Même question pour $\mathbb{C}P^n$.)
(b) Calculer $H_p(\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^m)$ pour $m < n$ en utilisant la structure cellulaire standard sur $\mathbb{R}P^n$ avec $\mathbb{R}P^m$ son m-skeleton.

13. Pour les complexes cellulaires finis X, Y. Montrer que $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

14. Soit X une complexe cellulaire qui est l'union de deux sous-complexes A, B. Montrer que $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.