Construction d'espaces

Exercise 1 (Quelques produits directes)**.** Montrer que

(1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est homéomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}$,

(2) Soient $k < n$ deux entiers. $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ est homéomorphe à $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$,

(3) Le groupe $O(n)$ est homéomorphe à $SO(n) \times O(1)$,

(4) Le groupe $GL(n)$ est homéomorphe à $SL(n) \times GL(1)$.

Exercise 2 (Espaces quotients)**.** (1) Montrer que l'intervale $I = [0,1]$ avec les points 0 et 1 identifiés, noté $I/[0 \sim 1]$, est homéomorphe au cercle S^1. Pour montrer cela on cherche une applicatiom continue $I \to S^1$ tel que les images reciproques de points de S^1 donne une partition de I en sigletons à l'interieure de I et de son bord contenant deux points $\{0,1\}$.

(2) Montrer que pour tout n il existe un homéomorphisme $D^n/S^{n-1} \to S^n$. Ici on considère le quotient de n-disque par son bord, la sphère.

Exercise 3 (Cylindre et tore)**.** Pour les couples des espaces suivantes expliciter des partitions et trouver des homéomorphisms.

(1) $I^2/\{(0,t) \sim (1,t) \text{ pour } t \in I\}$ et $S^1 \times I$.

(2) $S^1 \times I/\{(z,0) \sim (z,1) \text{ pour } z \in S^1\}$ et $S^1 \times S^1$.

(3) $I^2/\{(0,t) \sim (1,t),\ (t,0) \sim (t,1)\}$ et $S^1 \times S^1$.

Exercise 4. Montrer que

(1) $[0,1] \Big/ \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ est homéomorphe à $[0,1]$,

(2) si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, $A \subset X$, alors les espaces quotients X/A et $Y/f(A)$ sont aussi homéomorphes,

(3) $S^1/\{z \sim e^{2\pi i/3}z\}$ est homéomorphe à S^1,

Indication : La partition de S^1 : en triples de points - des sommets des triangles équilatéraux inscrits dans le cercle,

(4) $D^2/\{(x,y) \sim (-x,-y)\}$ est homéomorphe au disque D^2.

Exercise 5 (L'espace projectif)**.** L'espace projectif réel de dimension n, noté $P_n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}P^n$ est l'espace topologique quotient de S^n par l'action du groupe $\mathbb{Z}_2$ définie par $(-1) \cdot x = -x$.

(1) Montrer que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe au cercle S^1.

(2) Montrer que $\mathbb{R}P^2$ on peut obtenir comme le quotient de D^2 par rapport à la partition suivante : les couples des points du bord de D^2 symétriques par rapport au centre du disque et les singletons à l'interieur du disque.

(3) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à l'espace de droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par l'origine, i.e. à l'espace quotient $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.