Revêtements

Convention : Un revêtement est toujours supposé surjectif entre deux espaces topologiques séparés, connexes par arcs et localement connexes par arcs.

Exercise 1. Soit $p : X \to Y$ un revêtement avec Y connexe par arcs. Montrer que le nombre d'images réciproques $p^{-1}(y)$ est constant pour tout $y \in Y$.

Exercise 2. Soient $p : X \to Y$ et $p' : X' \to Y'$ deux revêtements. Montrer que l'application de $X \times X'$ vers $Y \times Y'$ définie par $(x, x') \mapsto (p(x), p'(x'))$ est un revêtement.

Exercise 3. Soit $p : X \to Y$ un revêtement et X est compacte. Montrer que le nombre des feuillets de p est fini.

Exercise 4. Soit X un espace topologique connexe par arcs et compacte. Soient $p : X \to Y$ et $q : Y \to Z$ deux revêtements. Montrer que $q \circ p : X \to Z$ est un revêtement.

Exercise 5. Montrer que $p : S^1 \to S^1$ avec $p(e^{2i\pi t}) = e^{2i\pi nt}$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ est un revêtement de S^1.

Exercise 6. Montrer que S^n est un revêtement de $\mathbb{R}P^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Donner explicitement l'application $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$. En utilisant ce revêtement, montrer que $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pour $n > 1$.

Exercise 7. Montrer que toute application continue $\mathbb{R}P^2 \to S^1$ est homotope à l'application constante.

Exercise 8. Montrer que toute application continue $S^n \to S^1$ est homotope à l'application constante pour $n > 1$.

Exercise 9. Soit G un groupe muni de la topologie discrète. Supposons que G agit sur un espace topologique X tel que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que si $g.U \cap U = \emptyset$ pour tout $g \neq e$ (une telle action est appelée *proprement discontinue*).

(1) Montrer que si X est séparé, connexe par arc, localement connexe par arc, alors X/G est séparé, connexe par arc, localement connexe par arc et l'application canonique $p : X \to X/G$ définie un revêtement régulier tel que le groupe des automorphismes $\Delta(p) = G$.

(2) Si G un groupe fini qui agit sur un espace topologique séparé X librement (i.e. $g.x = x \Rightarrow g = e$). Alors l'action est proprement discontinue.

(3) Montrer que l'action du groupe $\Delta(p)$ des automorphismes du revêtement $p : X \to Y$ sur X est proprement discontinue.

Exercise 10. Montrer que si le revêtement universel existe alors il est unique (dans le sens que s'il existe deux revêtements universels $p_1 : X_1 \to Y$ et $p_2 : X_2 \to Y$, alors il existe un homéomorphisme $f : X_1 \to X_2$ tel que $p_2 \circ f = p_1$).

Exercise 11. Montrer que les revêtements du cercle S^1 (à équivalence près) sont le revêtement universel $\mathbb{R} \to S^1$ avec $t \to e^{2i\pi t}$, et ses revêtements à n feuillets $S^1 \to S^1$ avec $e^{2i\pi t} \to e^{2i\pi n t}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercise 12. Classifier les revêtements du plan projectif à équivalence près.

Exercise 13. Classifier les revêtements d'un tore de dimension 2 à équivalence près.

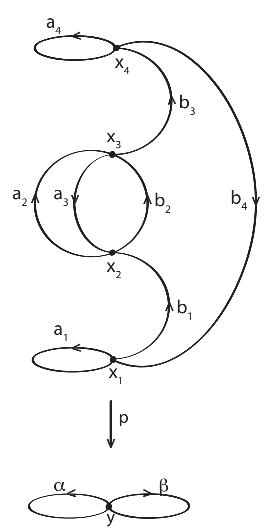
Exercise 14. Soit $P : X \to Y$ un revêtement. Soit $\gamma \in \pi_1(Y, y_0)$ tel que le relèvement de γ en un point de $p^{-1}(y_0)$ est un lacet. Montrer que le relèvement de γ est un lacet sur n'importe quel point de $p^{-1}(y_0)$ si et seulement si $p : X \to Y$ est un revêtement régulier.

Exercise 15. Classifier les revêtements 2- et 3- feuillets de bouquet de deux cercles à équivalence près.

Exercise 16. Construire un revêtement universel de $S^1 \vee S^1$ et de $S^1 \vee S^2$.

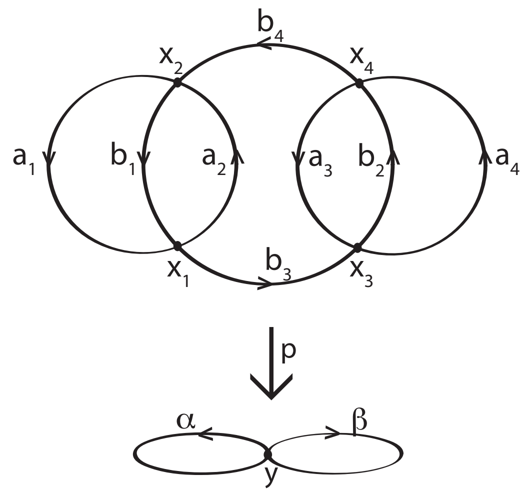
Exercise 17. Montrer qu'il existe un revêtement double de bouteille de Klein sur un tore.

Exercise 18. Soit $p : X \to S^1 \vee S^1$ un revêtement tel que $p(a_i) = \alpha, p(b_i) = \beta, p(x_i) = y$, voir figure ci-dessous.



(1) Trouver $\pi_1(X, x_1)$ et $p_\#(\pi_1(X, x_1))$. Justifier votre réponse.
(2) Est-ce qu'il existe un automorphisme D du revêtement (X, p) tel que $D(x_i) = x_j$ pour $j = i + 1, i = 1, 2, 3$.
(3) Trouver le groupe d'automorphisme $\Delta(X, p)$.

Exercise 19. Soit $p : X \to S^1 \vee S^1$ un revêtement tel que $p(a_i) = \alpha, p(b_i) = \beta, p(x_i) = y$, voir figure ci-dessous.



(1) Trouver $\pi_1(X, x_i)$ et $p_\#(\pi_1(X, x_i))$, $i = 1, 2, 3, 4$.

(2) Est-ce que le revêtement est régulier ? Justifier votre réponse.

(3) Trouver l'action de $\alpha, \beta, \alpha\beta, \beta\alpha \in \pi_1(S^1 \vee S^1, y)$ sur $x_1 \in p^{-1}(y)$.

(4) Décrire l'action de $\beta\alpha\beta\alpha^2 \in \pi_1(S^1 \vee S^1, y)$ sur $p^{-1}(y)$.

(5) Est-ce qu'il existe un automorphisme D du revêtement (X, p) tel que $D(x_1) = x_3$.

(6) Trouver le groupe des automorphisme $\Delta(X, p)$.

Exercise 20. Soient X, Y deux surfaces avec une triangulation T_X sur X et T_Y sur Y respectivement. Pour un couple (X, T_X) on définit $\chi(X) = s - a + f$ où s est le nombre des sommets, a est le nombre des arrêts et f est le nombre des faces de la triangulation T_X. C'est bien connu que ce nombre ne dépend pas de la choix de la triangulation et on l'appel la *caractéristique d'Euler*.

(a) Montrer que si X est un revêtement de Y à n feuillets alors $\chi(X) = n\chi(Y)$.

(b) Montrer que S^2 peut être seulement le révetement de S^2 et de $\mathbb{R}P^2$.

(c) Montrer que la bande Möbius peut être seulement le révetement de soi-même.