

Contrôle 1

Exercice 1. 1. Donner la définition d'un espace topologique.

2. Donner un exemple d'application continue entre deux espaces topologiques (en précisant leurs topologies).

Exercice 2. Soit X un ensemble fini à 3 éléments.

1. Combien de sous-ensembles fermés y a-t-il pour la topologie discrète sur X ?
2. Combien de sous-ensembles fermés y a-t-il pour la topologie grossière sur X ?
3. Donner deux exemples de topologie sur X qui sont différentes de la topologie discrète et la topologie grossière.

Exercice 3. 1. Montrer que la fonction suivante est une fonction de distance sur \mathbb{C} : pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$d(z_1, z_2) := \begin{cases} |z_1 - z_2| & \text{si } z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont } \mathbb{R}\text{-colinéaires;} \\ |z_1| + |z_2| & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1)$$

2. Notons T_1 la topologie euclidienne sur \mathbb{C} (on identifie \mathbb{C} avec \mathbb{R}^2), et T_2 la topologie sur \mathbb{C} induite par la distance d ci-dessus. On définit l'application "identité"

$$f: (\mathbb{C}, T_2) \rightarrow (\mathbb{C}, T_1)$$

définie par $f(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est continue et que T_2 est plus fine que T_1 .

3. Montrer que T_2 est strictement plus fine que T_1 .