Université de Strasbourg **L3 Mathématiques**

Topologie, 2023-2024

Contrôle 2

Exercice 1. (Question de cours) Soient $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, 3$, trois espaces topologiques. Donner une base de la topologie produit sur $X_1 \times X_2 \times X_3$, en termes des ouverts des X_i.

Exercice 2. Soit M l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients complexes. Via l'identification $M \cong \mathbb{C}^{n^2}$, on munit M de la topologie euclidienne. Soit $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le sous-espace de M formé des matrices inversibles.

1. Montrer que l'application $\det \colon M \to \mathbb{C}$, qui envoie une matrice A sur son déterminant $\det(A)$, est une application continue.
2. En déduire que G est un sous-ensemble ouvert de M.
3. Admettons que les deux applications suivantes sont continues :
   (a) L'application de multiplication $m \colon G \times G \to G$ qui envoie (A, B) sur AB ;
   (b) L'application d'inverse $\iota \colon G \to G$ qui envoie A sur A^{-1}.

   Montrer que l'application commutateur $c \colon G \times G \to G$, qui envoie (A, B) sur $ABA^{-1}B^{-1}$, est continue.

Exercice 3. Déterminer si les espaces topologiques suivants sont compacts. Justifiez vos réponses.

1. $X_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$.
2. $X_2 = [0, 1] \cup [\pi, +\infty[$, muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$.
3. $X_3 =]0, 1[$ muni de la topologie co-finie.

Exercice 4. Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur X, telles que X est compact et séparé pour $\mathcal{T}$ et pour $\mathcal{T}'$. Le but de cet exercice est de montrer que les deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$, si différentes, ne sont pas comparables. Supposons $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$.

1. Monterer que l'application "identité"
$$f \colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}'),$$
$$x \mapsto x$$
   est continue.
2. Montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.