Université de Strasbourg **L3 Mathématiques**

Topologie, 2023-2024

Contrôle 3

Dans un exercice, vous avez le droit d'utiliser les conclusions des questions précédentes.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$, muni de la métrique euclidienne, y-a-t-il des sous-ensembles (muni de la métrique induite)

1. X_1 qui est compact mais non connexe ?
2. X_2 qui est complet mais non compact ?
3. X_3 qui est compact mais non complet ?
4. X_4 qui est connexe avec complémentaire non connexe ?

Pour chaque question, donnez un exemple si vous pensez qu'il en existe un (sans justification), ou une preuve si vous pensez qu'il n'en existe pas.

Exercice 2. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques.

1. Montrer que l'application "graphe"
$$\begin{aligned}\gamma\colon X &\to X \times Y\\ x &\mapsto (x, f(x))\end{aligned}$$
est continue. Ici $X \times Y$ est munie de la topologie produit.
2. Soit f une application continue d'un espace topologique X vers lui-même. On suppose que X est séparé (Hausdorff). Montrer que le sous-ensemble des points fixes
$$\mathrm{Fix}(f) := \{x \in X \mid x = f(x)\}$$
est fermé dans X.
3. Soient X un espace topologique séparé et $f\colon X \to X$ une application continue. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le sous-ensemble des points n-périodiques
$$\mathrm{Per}_n(f) := \{x \in X \mid x = f^n(x)\}$$
est fermé. On rappelle que $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$.
4. Sous les mêmes hypothèses, on définit le lieu des points périodiques :
$$\mathrm{Per}(f) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(f).$$
A-t-on toujours que $\mathrm{Per}(f)$ est fermé ? Si oui, donner une preuve ; sinon, donner un contre-exemple.

Exercice 3. Soit X un espace métrique compact. Le but de cet exercice est de montrer que X admet une base de topologie dénombrable (i.e. X vérifie la condition C2).

1. Soit n un entier strictement positif, montrer qu'il existe un recouvrement fini $\mathcal{A}_n$ de X consistant en des boules de rayon $\frac{1}{n}$.
2. Montrer que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ est une base de topologie dénombrable de X.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme de groupe, i.e. pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On suppose de plus que f est continue.

1. Montrer que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une application $\mathbb{R}$-linéaire, i.e. il existe un nombre $a \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $f\colon X \to X$ une application isométrique, i.e. pour tous $x_1, x_2 \in X$, on a

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)).$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est surjective. *Indication : considérer la suite $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots$ et utiliser la compacité de X.*
3. Montrer que f est un homéomorphisme.