Université de Strasbourg **L3 Mathématiques**

2023-2024

Topologie, feuille 3

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et soit $\mathcal{B}$ une base pour $\mathcal{T}_Y$. Montrer que $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et soit $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ une application continue et injective. Montrer que si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est séparé, alors $(X, \mathcal{T}_X)$ est séparé.

Exercice 3. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. Montrer que $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue si et seulement si pour tout sous-ensemble A de X, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On suppose que toutes les applications de X dans $\mathbb{R}$ (muni de la topologie euclidienne) sont continues. Montrer que $\mathcal{T}$ est la topologie discrète.

Exercice 5. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X, et soit Y un sous-ensemble de X. On suppose que $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$. Que dire des topologies induites par $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sur Y ?

Exercice 6. Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie non vide de E. Pour tout x dans E on appelle *distance de x à A*, notée $d(x, A)$, le nombre $\inf_{y \in A} d(x, y)$.

1. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $d(x, A)$ est bien définie et s'annule sur A.
2. On note B l'ensemble des points $x \in E$ tels que $d(x, A) = 0$. Montrer que B est égal à l'adhérence de A.

Exercice 7. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A = [0, 5[$. On munit A de la topologie induite par la topologie euclidienne sur $\mathbb{R}$.

1. Pour chacune des trois parties suivantes de A, justifier si elles sont ouvertes et si elles sont fermées.
   (a) $]1, 2]$.
   (b) $[3, 5[$.
   (c) $[0, 3[$.
2. Donner les intérieurs et les adhérences de ces parties dans A.
3. Déterminer la boule ouverte de centre 1 et de rayon 2 dans A.

Exercice 8. Donner des exemples d'espaces topologiques pour lesquels il existe des parties :

1. à la fois ouvertes et fermées,
2. ni ouvertes ni fermées.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne usuelle on considère le sous-ensemble

$$\Theta = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [-1,1]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1, x \neq 0\}.$$

Dessiner cette partie Θ de $\mathbb{R}^2$. Est-elle ouverte, fermée dans $\mathbb{R}^2$? Déterminer son intérieur et son adhérence.

Exercice 10. Soit A une partie d'un espace topologique X.

1. Montrer que $X \setminus (\overline{X \setminus A}) = \mathring{A}$.
2. Montrer que $X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} A) = \overline{A}$.

Exercice 11. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie euclidienne. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de chacun des sous-ensembles ci-dessous.

1. $]0,1[$,
2. $[0,1]$,
3. $]0,1]$,
4. $]1,+\infty[$,
5. $]-\infty,1]$,
6. $\mathbb{R}$,
7. $\emptyset$,
8. $\{0\}$,
9. $\mathbb{Z}$,
10. $\mathbb{Q}$.

Exercice 12. Soit X un espace topologique et soit A une partie de X. On appelle *frontière* de A l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

1. Montrer que $\partial \overline{A} \subset \partial A$ et $\partial \mathring{A} \subset \partial A$. Donner des exemples sur $\mathbb{R}$ où les inclusions sont strictes.
2. Montrer que $\partial(X \setminus A) = \partial A$.
3. Montrer que les parties $(X \overset{\circ}{\setminus} A)$, ∂A et $\mathring{A}$ sont disjointes, et que $X = (X \overset{\circ}{\setminus} A) \cup \partial A \cup \mathring{A}$.

Exercice 13. Soit X un espace topologique et soient A et B des parties de X.

1. On suppose que $A \cup B = X$. Montrer que $\overline{A} \cup \mathring{B} = X$.
2. On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $\overline{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$.

Exercice 14. Soit (E,d) un espace métrique et soient A et B deux sous-ensembles de E. On suppose que $A \cap B = \emptyset$ et que A et B sont denses dans E. Montrer que l'on a $\mathring{A} = \mathring{B} = \emptyset$.

Exercice 15. Soit E un espace vectoriel normé et soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.