Université de Strasbourg **L3 Mathématiques**

2023-2024

Topologie, feuille 4

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques, et soit $f : X \to Y$ une application continue et surjective.

1. Montrer que si $(X, \mathcal{T}_X)$ est séparable, alors $(Y, \mathcal{T}_Y)$ l'est aussi.
2. On suppose de plus que f est une application ouverte, montrer que si $(X, \mathcal{T}_X)$ est à base dénombrable (C2), alors $(Y, \mathcal{T}_Y)$ l'est aussi.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $\mathcal{B}$ une base pour $\mathcal{T}$. Soit A une partie de X et soit $x \in X$. Montrer que $x \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}$ contenant x, $A \cap B \neq \emptyset$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = \{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. On rappelle (voir feuille 2) que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie sur $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{T}$ la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

1. $\mathcal{T}$ est-elle séparable ?
2. $\mathcal{T}$ est-elle à base dénombrable (C2) ?

Exercice 4. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérife la *condition de chaîne dénombrable* si toute famille d'ouverts deux à deux disjoints est finie ou dénombrable.

1. On suppose que $(X, \mathcal{T})$ est séparable. Montrer qu'il vérifie la condition de chaîne dénombrable.
2. Soit X un ensemble non-dénombrable et soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A = X \text{ ou } X \setminus A \text{ est fini ou dénombrable}\}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie.
   (b) Montrer que $(X, \mathcal{T})$ vérifie la condition de chaîne dénombrable mais n'est pas séparable.

Exercice 5. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques, et soit $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Montrer que si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est séparé, alors $F = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que X, muni de la topologie associée à la métrique d, est T4 (normal).

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. On munit X de la topologie associée à la métrique d. Montrer que si X est séparable, alors X est à base dénombrable (C2).

Exercice 8. Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit.

1. Montrer que $X \times Y$ est régulier (T3) si et seulement si X et Y le sont.
2. Montrer que si $X \times Y$ est normal (T4), alors X et Y le sont. (La réciproque n'est pas vraie en général.)

Exercice 9. On munit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$ de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}, X\}\,.$$

Décrire les topologies induites sur $Y = \{a, c, e\}$ et $Z = \{b, c, d, e\}$.

Exercice 10. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que soit G est dense dans $\mathbb{R}$, soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

Exercice 11. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une isométrie, c'est-à-dire

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

On suppose que f est surjective ; montrer que f est un homéomorphisme.

Connexité

Exercice 12. Les lettres X et Y sont-elles homéomorphes ?

Exercice 13. Soit X et Y deux espaces topologique.

1. Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue et que si $A \subset X$ est connexe, alors $f(A)$ est connexe dans Y.
2. Montrer que $X \times Y$ est connexe si et seulement si X et Y le sont.

Exercice 14. Soient X un espace topologique et A une partie de X. Montrer que A est une partie connexe de X si et seulement si pour tout couple (U_1, U_2) d'ouverts de X tel que $A \subset U_1 \cup U_2$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, alors $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$.

Exercice 15. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue.

1. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
2. En utilisant la connexité de $[0, 1]$, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 16.
1. Les espaces métriques $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ sont-ils connexes ? En déduire que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
2. Montrer que $\mathbb{S}^1$ (le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$) n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 17 (Groupes Topologiques)**.** Soit G un groupe commutatif dont la loi est notée $\cdot$ muni d'une topologie $\mathcal{T}$ et telle que les applications [1]

$$\begin{array}{rcl} \bullet : G \times G & \to & G \\ (g_1, g_2) & \mapsto & g_1 \cdot g_2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \to & G \\ g & \mapsto & \varphi(g) = g^{-1} \end{array}$$

soient continues.

Soit H un sous-groupe de G, on parle de sous-groupe topologique en le munissant de la topologie induite par celle de G. On note e l'élément neutre de G. On munit le quotient G/H de la topologie quotient.

1. Montrer que pour h fixé dans G l'application $\tau_h : G \to G$ qui à tout élément g de G associe $\tau_h(g) = g \cdot h$ est un homéomorphisme.
2. Montrer que H est un ouvert de G si et seulement si $e \in \mathring{H}$.
3. Montrer que si H est ouvert alors il est aussi fermé.
4. Montrer que $C_{\{e\}}$, la composante connexe de e dans G, est un sous-groupe topologique de G.
5. Montrer que si G est connexe, alors il ne possède pas de sous-groupe strict d'intérieur non vide et non réduit à e.
6. Montrer que si H et G/H sont connexes alors G est connexe.

Exercice 18. Soit le peigne dans $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_\infty)$ donné par

$$P = (\mathbb{Q} \times [0,1]) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2.$$

Montrer que P est connexe (et même connexe par arcs), mais pas localement connexe.

Exercice 19. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x}\} \subset (\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

1. Montrer que A est connexe, connexe par arcs, localement connexe.
2. Déterminer $\bar{A}$ et montrer que $\bar{A}$ est connexe mais qu'il n'est ni connexe par arcs, ni localement connexe.

1. $G \times G$ est muni de la topologie produit.