Topologie, feuille 5 : Espaces compacts

(Rappel : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X,d) admet une valeur d'adhérence a s'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.)

Exercice 1. Soit X un ensemble infini muni de la métrique discrète d définie par $d(x,y)=1$ si $x\neq y$.

1. Montrer que toute partie de X est bornée et fermée.
2. Montrer qu'un sous-ensemble de X est compact si et seulement s'il est fini.

Exercice 2.

1. Le sous-espace métrique $\mathbb{N}$ de $(\mathbb{R},|\cdot|)$ est-il compact ?
2. Un espace métrique muni de la distance discrète est-il compact ?

Exercice 3. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soient K et L deux parties compactes de E. Montrer que l'espace somme $K+L$ est une partie compacte de $(E,\|\cdot\|)$.

Exercice 4. Soient deux espaces topologiques compacts X et Y. Montrer que $X\times Y$ est un espace topologique compact.

Exercice 5. Soit X un espace topologique et soient $K_1,\cdots,K_n$ des parties compactes de X. Montrer que la réunion $K=\bigcup_{i=1}^n K_i$ est un compact de X et que si X est de plus séparé, l'intersection $K'=\bigcap_{i=1}^n K_i$ est un compact de X.

Exercice 6. Soit A un sous-ensemble de $(\mathbb{R},|\cdot|)$. On appelle *point d'accumulation* de A tout point a de $\mathbb{R}$ tel que
$$\forall\varepsilon>0 \qquad (]a-\varepsilon,a[\cup]a,a+\varepsilon[)\cap A\neq\emptyset.$$

1. Montrer que x_0 est un point d'accumulation de A si et seulement s'il existe une suite non stationnaire de A qui converge vers x_0.
2. Montrer que toute partie infinie bornée de $(\mathbb{R},|\cdot|)$ admet au moins un point d'accumulation.

Exercice 7. Soient (X,d) un espace métrique compact et $f:X\to X$ une application telle que pour tous x et y de X,
$$\text{si } x\neq y, \text{ alors } d(f(x),f(y))<d(x,y).$$
Montrer que f admet un unique point fixe.

Donner des exemples qui montrent que le résultat n'est pas vrai si :

1. on ne suppose plus X compact ;
2. on suppose seulement $d(f(x),f(y))\leq d(x,y)$.

Exercice 8. Soit X un espace topologique séparé et localement compact (c'est-à-dire que chaque point de X admet un voisinage compact). Posons $X_w := X \cup w$ où $w \notin X$. Notons $\mathcal{T}_w$ l'ensemble des parties de X_w qui sont soit des ouverts de X, soit de la forme $\{w\} \cup (X \backslash K)$ avec K compact.

1. Montrer que $\mathcal{T}_w$ est une topologie de X_w.
2. Montrer que X_w muni de cette topologie est un compact.
3. Montrer que l'inclusion $X \subset X_w$ définit une injection continue de X dans X_w.
4. Montrer que $\mathbb{R}^2_w$ est homéomorphe à S^2, la sphère de dimension 2.

Cette construction s'appelle la *compactification d'Alexandrov* de X.

Exercice 9. Pour $n \geq 1$, soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \times n$. Montrer que $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$ est compact. (Indication : Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.)

Exercice 10. Soit $(X = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), d_\infty)$ l'espace des fonctions continues muni de la distance

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

On veut montrer que la boule unité fermée $B \subset X$ n'est pas compacte.

1. Expliquer par un dessin l'allure des fonctions contenues dans la boule B.
2. Dessiner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction continue $f_n : [0,1] \to [0,1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ et qui prend la valeur 1 au milieu de l'intervalle.
3. Pour tous n, m entiers, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$?
4. Conclure.

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élélements de X admettant une unique valeur d'adhérence. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 12. Soit (X, d) un espace métrique non-vide compact. On note $\mathrm{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y) \in [0, +\infty]$.

1. Montrer que $\mathrm{diam}(X)$ est fini et qu'il existe $x, y \in X$ tels que $\mathrm{diam}(X) = d(x, y)$.
2. Montrer que, si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non-vides de X, alors $F := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un compact non-vide de X et $\mathrm{diam}(F) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{diam}(F_n)$.
3. Si on ne suppose plus (X, d) compact, cette intersection est-elle nécessairement non-vide ?

Exercice 13. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de parties de $\mathcal{T}$ possède la propriété d'intersection finie si pour tout sous-ensemble fini $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, l'intersection $\bigcap_{j \in \mathcal{J}} A_j$ est non-vide.

Montrer que X est compact si et seulement si pour tout famille $(F_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de fermés possédant la propriété d'intersection finie, l'intersection $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} F_i$ est non-vide.

Exercice 14. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On suppose que $(X, \mathcal{T}_X)$ est compact et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est séparé. Soit $f : X \to Y$ continue ; montrer que f est fermée (l'image par f de tout fermé est fermé).

Exercice 15. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. On suppose que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est compact. Montrer que la projection $\pi_1 : X \times Y \to X$ est fermée.