Université de Strasbourg **L3 Mathématiques**

2023-2024

Topologie, feuille 7 : Construction d'espace, topologie quotient

Exercice 1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a les homéomorphismes :

1. $B^n/\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n$;
2. $(\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1])/(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) \cong B^n$;

où B^n est la boule fermée de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ est le bord de cette boule.

Exercice 2. Soit X un espace topologique séparé muni d'une relation d'équivalence R. Montrer que si l'espace quotient X/R est séparé, alors le graphe Γ de R est fermé dans $X \times X$.

Exercice 3. Soit X un espace topologique séparé muni d'une relation d'équivalence R et soit $q : X \to X/R$ telle que :

1. Pour tout $x \in X$, le *saturé* $q^{-1}(q(x))$ de $\{x\}$ est compact dans X.
2. Le saturé d'un fermé de X est fermé.

Montrer que l'espace X/R est séparé. En déduire que si X est séparé et si A est une partie compacte de X, alors l'espace quotient X/A est séparé.

Exercice 4. Pour $n \geq 1$, on note $P^n(\mathbb{R})$ (où $\mathbb{R}P^n$) l'espace projectif réel de dimension n défini comme étant l'espace topologique quotient de $\mathbb{S}^n$ pour l'action du groupe $\mathbb{Z}_2$ définie par $(-1)\cdot x = -x$. Montrer qu'il est séparé, compact et connexe. Montrer que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$ en considérant l'application $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^2$.

Exercice 5. Montrer que l'espace $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe aux espaces suivants :

1. L'espace des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par l'origine, *i.e.*, l'espace quotient $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, où le groupe multiplicatif $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ agit par homothétie.
2. L'espace B^n/R, où R est la relation d'équivalence définie par $x = y$ ou ($x \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $x = -y$).

Exercice 6. Montrer que l'espace $\mathbb{R}P^3$ est homéomorphe à l'espace

$$SO(3) = \{M \in GL_3(\mathbb{R}) \,|\, {}^tMM = I_3,\, \det(M) = 1\}.$$

Exercice 7. On définit, de manière analogue à $\mathbb{R}P^n$, l'espace projectif complexe de dimension n complexe $\mathbb{C}P^n$ comme le quotient de

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \left\{ (z_1, \cdots, z_n{+}1) \in \mathbb{C}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} \|z_i\|^2 = 1 \right\}$$

pour l'action du groupe $\mathbb{S}^1$ définie par la multiplication complexe :

$$z \cdot (z_1, \cdots, z_{n+1}) = (zz_1, \cdots, zz_{n+1}).$$

Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$ et montrer des homéomorphismes analogues à ceux de l'exercice 5.