Université de Strasbourg **L3 Mathématiques**

2024-2025

Topologie, feuille 1 : ensembles, topologies

Exercice 1. Soient E un ensemble et A_1, A_2 des parties de E. Démontrer les affirmations suivantes :

1. $E \setminus (A_1 \cup A_2) = (E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)$,
2. $E \setminus (A_1 \cap A_2) = (E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)$.

Exercice 2. Soit $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E. Démontrer les affirmations suivantes :

1. $E \setminus (\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}}(E \setminus A_i)$,
2. $E \setminus (\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i) = \bigcup_{i\in\mathcal{I}}(E \setminus A_i)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Décrire les ensembles suivants :

1. $f^{-1}(\{1\})$,
2. $f^{-1}(]0, 1])$,
3. $f([0, 1] \times \{1\})$.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles et soient $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$ et $(B_j)_{j\in\mathcal{J}}$ deux familles de sous-ensembles de E et F respectivement, avec $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ des familles d'indices quelconques. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :

1. $f(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i) = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} f(A_i)$,
2. $f(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i) \subset \bigcap_{i\in\mathcal{I}} f(A_i)$,
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
5. $f^{-1}(\bigcup_{j\in\mathcal{J}} B_j) = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} f^{-1}(B_j)$,
6. $f^{-1}(\bigcap_{j\in\mathcal{J}} B_j) = \bigcap_{j\in\mathcal{J}} f^{-1}(B_j)$,
7. $f^{-1}(F \setminus B_1) = E \setminus f^{-1}(B_1)$,
8. $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$ avec égalité si f est surjective,
9. $f^{-1}(f(A_1)) \supset A_1$ avec égalité si f est injective.

Soit i un élément de $\mathcal{I}$; existe-t-il une relation entre $f(E \setminus A_i)$ et $F \setminus f(A_i)$?

Exercice 5.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable.
2. Donner une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. En utilisant le fait qu'une partie d'un ensemble dénombrable est soit dénombrable, soit finie, montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 6. Montrer que $]1, +\infty[$ et $]0, 1[$ sont équipotents à $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Si X est un ensemble quelconque, montrer que X et $\mathcal{P}(X)$ (l'ensemble des parties de X) ne sont pas équipotents.

Indication : commencer par supposer qu'il existe une bijection $f : X \to \mathcal{P}(X)$, puis considérer l'élément α de X défini par $\alpha = f^{-1}(A)$ où $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ afin de mettre en évidence une contradiction.

Exercice 8. On veut montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Montrer d'abord que $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents puis, en utilisant les développements décimaux des nombres réels, montrer que $]0,1[$ n'est pas dénombrable.

Exercice 9. Soit A un ensemble de cardinal infini et soit $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ tels que si $\alpha \neq \beta$ alors $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$. Montrer que A est dénombrable.

Exercice 10. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Un sous-ensemble est toujours de cardinal fini.
2. Une application est soit injective soit surjective.
3. Toute application admet une application réciproque.
4. Il existe un ensemble de cardinal strictement plus grand que celui de $\mathbb{R}$.
5. Il existe une injection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.
6. Il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.
7. Il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 11. Soit X un espace topologique séparé. Montrer que pour tout élément x de X, le sous-ensemble $\{x\}$ est un fermé de X.

Exercice 12. Soit $f : X \to Y$ une application d'un ensemble non vide X dans un espace topologique Y, et soit

$$\mathcal{T} = \left\{ f^{-1}(G) \mid G \text{ ouvert de } Y \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.

Exercice 13. Soit X un ensemble de cardinal infini, et soit

$$\mathcal{T} = \{O \subset X \mid O = \emptyset \text{ ou } \mathrm{card}(X \setminus O) < +\infty\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
2. Soient O_1, O_2 deux ouverts non vides de $\mathcal{T}$. Montrer que $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.
3. L'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est-il séparé ?

Exercice 14. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$, et soit

$$F_P = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\} \quad \text{et} \quad O_P = \mathbb{R} \setminus F_P.$$

1. Montrer F_P est soit vide, soit de cardinal fini, soit égal à $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\{O_P \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
3. Cette topologie est-elle séparée ?

Exercice 15. Soit $X = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments. Donner la liste de toutes les topologies sur X qui comportent exactement quatre ouverts distincts.

Exercice 16. Déterminer toutes les topologies sur un ensemble à 2 éléments (respectivement à 3 éléments) et dire si elles sont séparées ou non.

Exercice 17. Lesquelles des familles suivantes des parties de $[0, 1]$ forment une topologie sur $[0, 1]$?

1. $\mathcal{T}_1 = \{A \subset [0, 1] \mid A \subset]0, 1[\text{ ou } A = [0, 1]\}$.
2. $\mathcal{T}_2 = \{A \subset [0, 1] \mid A \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1] \text{ ou } \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset A\}$.
3. $\mathcal{T}_3 = \{A \subset [0, 1] \mid A \cdot A \subset A\}$.
4. $\mathcal{T}_4 = \{A \subset [0, 1] \mid A + A \subset A \text{ ou } \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset A\}$.
5. $\mathcal{T}_5 = \{A \subset [0, 1] \mid 0 \notin A \text{ ou } A = [0, 1]\}$.
6. $\mathcal{T}_6 = \{A \subset [0, 1] \mid 0 \in A \text{ ou } A = \emptyset\}$.

Exercice 18. Montrer que toute intersection de topologies est une topologie.

Exercice 19. Soit X un espace muni d'une topologie $\mathcal{T}_X$. Soit Y un sous-ensemble de X. Montrer que la famille de parties de Y donnée par $\mathcal{T}_Y = \{A \subset Y \mid A = B \cap Y,\, B \in \mathcal{T}_X\}$ forme une topologie sur Y.

(On dit que Y est muni de la topologie induite par la topologie $\mathcal{T}_X$ sur X ou encore que Y est un sous-espace topologique de X.)

Exercice 20. Soient X un ensemble et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de X qui contient X et $\emptyset$. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie sur X, c'est-à-dire qu'il existe une topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que tout élément de $\mathcal{T}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{T}$ est engendrée par $\mathcal{A}$.
3. Montrer que si $\mathcal{T}_1$ est une topologie sur X qui contient $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$.
4. Soient $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{]-\infty, x[\mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Décrire la topologie engendrée par $\mathcal{A}$. Est-elle séparée ?
5. Soient $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{]x, y[\mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Décrire la topologie engendrée par $\mathcal{A}$.

Distances et espaces métriques.

Exercice 21. Les fonctions suivantes de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définissent-elles des métriques sur $\mathbb{R}$?

1. $f(x, y) = |x^2 - y^2|$
2. $g(x, y) = |x^3 - y^3|$
3. $h(x, y) = e^{|x-y|}$.

Exercice 22.

1. On considère $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle $\mathrm{d}(x,y) = |x-y|$. Si $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, décrire et dessiner la boule fermée de centre a et rayon r.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que les applications suivantes sont des distances puis décrire et dessiner les boules fermées centrées en un point $a = (a_1, a_2)$ et de rayon r.
   (a) La distance euclidienne $\mathrm{d}_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$.
   (b) $\mathrm{d}_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.
   (c) $\mathrm{d}_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$.
3. Montrer que les applications d_1, d_2 et d_∞ définies pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par :
   — $\mathrm{d}_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$,
   — $\mathrm{d}_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$,
   — $\mathrm{d}_\infty(x,y) = \max_{i\in\{1,\cdots,n\}} |x_i - y_i|$.

   sont des distances sur $\mathbb{R}^n$; et donc que $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_1)$, $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_2)$ et $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ sont des espaces métriques.

Exercice 23. Soient $(E_,\mathrm{d}_1)$ et (E_2, d_2) deux espaces métriques. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} D : (E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2) & \to & \mathbb{R}_+ \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \mapsto & \sqrt{\mathrm{d}_1(x_1,y_1)^2 + \mathrm{d}_2(x_2,y_2)^2} \end{array}$$

est une distance sur $E_1 \times E_2$.

Exercice 24 (CC1 2022/2023)**.** Soit $X =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in X$, on définit

$$\delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|.$$

1. Montrer que δ est une distance sur X.
2. Déterminer $B(1,1)$ pour cette distance.
3. La partie $A =]0,1]$ est-elle bornée pour cette distance ? Fermée ?
4. Déterminer les boules ouvertes pour cette distance.

Exercice 25. Si a est un point de $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_2)$, montrer que

$$\bigcap_{n\geq 0} B\left(a, \frac{1}{n+1}\right) = \{a\}.$$

Exercice 26. Sur $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que l'application

$$\mathrm{d}(P,Q) = \mathrm{d}\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i, \sum_{i=0}^n b_i X^i\right) = \sum_{i=0}^n |a_i - b_i|$$

est une distance.

Exercice 27. Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, montrer que l'application

$$\mathrm{d}(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\mathrm{d}t$$

est une distance.

Exercice 28. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application d_∞ définie sur $E \times E$ par

$$\mathrm{d}_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$$

est une distance sur E.

Étant donné un élément f de E, décrire les éléments de la boule ouverte de centre f et de rayon $r > 0$; si l'on représente un élément de E par son graphe dans $[0,1]\times\mathbb{R}$, alors dessiner $B_\infty(f,r)$.